CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016 -

CLASA a XII-a
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN/ PEDAGOGIC
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

a) Determinați $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ pentru care $\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Determinați $X\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $2X+\begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -y & -x \\ -3v & 2u-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$	1p
$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} -x-y & y-x \\ u+1-3v & v+2u-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} u-3v+1=-8 \\ 2u+v-1=2 \end{cases}$ În final obținem $x=1$, $y=2$, $u=0$, $v=3$.	3p
b) $2X+\begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ 12 & 1 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2X=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 13 \\ 16 & 22 & 19 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow 2X=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 13 \\ 16 & 22 & 19 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & -10 & 5 \\ -6 & -12 & 3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$	1p
$\Leftrightarrow 2X=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 18 \\ 10 & 10 & 22 \end{pmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.	2p

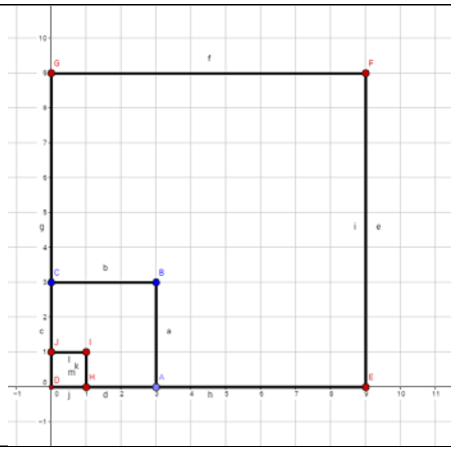
Enunţ subiect 2

Fie pătratul $OABC$ reprezentat în reperul xOy, unde $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(3,3)$, $C(3,3)$ și

$T=\begin{pmatrix} x_O & x_A & x_B & x_C \\ y_O & y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}$ matricea asociată figurii $OABC$.

a) Calculați $T_1=3T$, $T_2=\frac{1}{3}T$ și construiți în reperul xOy figurile asociate matricelor T_1 și T_2.

b) Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care αT este matricea asociată pătratului $OA'B'C'$, unde A', B', C' sunt simetricele punctelor A, B, respectiv C în raport cu O.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $3T = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2p
	2p
b) $\begin{pmatrix} x_O & x_{A'} & x_{B'} & x_{C'} \\ y_O & y_{A'} & y_{B'} & y_{C'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_O & -x_A & -x_B & -x_C \\ -y_O & -y_A & -y_B & -y_C \end{pmatrix} = -T$	2p
$-T = \alpha T \Rightarrow \alpha = -1$	1p

Enunţ subiect 3

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ notăm $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot .... \cdot A}_{de\ n\ ori}$

a) Arătați că $A + A^2 = 2A$.
b) Calculați A^{2016}.
c) Demonstrați că $A + 2A^2 + 3A^3 + ... + nA^n = \frac{n(n+1)}{2} A$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A$	1p
$A + A^2 = A + A = 2A$	1p
b) $A^{2016} = A$; $C^2 = I_2$	2p
c) $A + 2A^2 + 3A^3 + ... + nA^n = A + 2 \cdot A + 3 \cdot A + ... + n \cdot A =$	1p
$= (1 + 2 + 3 + ... + n) \cdot A = \frac{n(n+1)}{2} A$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.	2p

Enunţ subiect 4

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Notăm $A^2 = A \cdot A$.

a) Calculați A^2.

b) Verificați dacă $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I_2$.

c) Dacă $a+d\neq 0$ și $M\in M_2(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $A^2\cdot M=M\cdot A^2$, atunci demonstrați că $A\cdot M=M\cdot A$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
a) Calcul direct; se obține $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$	2p
b) Prin calcul direct se stabilește că egalitatea este adevărată.	2p
c) Conform b) obținem $A^2M=(a+d)AM-(ad-bc)M$ și $MA^2=(a+d)MA-(ad-bc)M$	1p
$(a+d)AM-(ad-bc)M=(a+d)MA-(ad-bc)M\Rightarrow(a+d)AM=(a+d)MA\Rightarrow$ $\Rightarrow AM=MA$ pentru că $a+d\neq 0$	2p