MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016

CLASA a VI-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Fie n cel mai mic număr natural nenul care împărțit la numerele naturale a,b,c dă câturile c_1, c_2, respectiv c_3 și resturile $a-1, b-1$, respectiv $c-1$. Dacă a,b,c sunt două câte două prime între ele, arătați că $c_1+c_2+c_3+3=ab+bc+ca$.

2. Fie M mijlocul segmentului AB. De aceeași parte a dreptei AB se consideră semidreptele $[MN$ și $[MP$ astfel încât $[MN$ este bisectoarea unghiului BMP și $[MP$ este bisectoarea unghiului AMN. Dacă $[MN]\equiv[MP]$, arătați că $\Delta ABP\equiv\Delta BAN$.

3. Pe o dreaptă d considerăm punctele $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n$, în această ordine, astfel încât $A_0A_1=1$ cm, $A_1A_2=2$ cm, $A_2A_3=2^2$ cm, $A_3A_4=2^3$ cm, ..., $A_{n-1}A_n=2^{n-1}$ cm. Arătați că nu există $p\in\{0,1,2,...,n\}$ astfel încât A_p să fie mijlocul segmentului A_iA_j, oricare ar fi $i, j\in\{0,1,2,...,n\}$, $i<j$.

4. Fie O un punct în plan. Se consideră toate semidreptele cu originea în O, care se colorează în roșu sau în negru. Arătați că există trei semidrepte $[OA, [OB, [OC$ în aceeași culoare astfel încât $[OB$ să fie bisectoarea unghiului AOC.

Gazeta Matematică

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016
CLASA a VI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1

Fie n cel mai mic număr natural nenul care împărțit la numerele naturale a,b,c dă câturile c_1,c_2, respectiv c_3 și resturile $a-1,b-1$, respectiv $c-1$. Dacă a,b,c sunt două câte două prime între ele, arătați că $c_1+c_2+c_3+3=ab+bc+ca$.

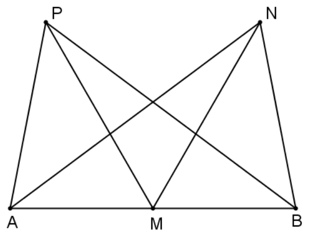
Autor: Ion Voicu, Rădulești, Ialomița

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Din teorema împărțirii cu rest avem $n=ac_1+a-1$, $n=bc_2+b-1$, $n=cc_3+c-1$ sau $n+1=a(c_1+1)$, $n+1=b(c_2+1)$, $n+1=c(c_3+1)$.	2p
De aici deduce că $n+1$ este multiplu comun pentru numerele a,b,c și cum n trebuie să fie cel mai mic avem $n+1=[a,b,c]$ unde $[a,b,c]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a,b,c. Prin urmare $n=[a,b,c]-1$.	2p
Pe de altă parte, a,b,c fiind două câte două prime între ele rezultă $[a,b,c]=abc$ și atunci $n=abc-1$.	1p
Înlocuind în $n=ac_1+a-1$ obținem $abc-1=ac_1+a-1$, de unde $c_1+1=bc$. Analog $c_2+1=ac$ și $c_3+1=ab$. Adunând cele trei relații obținem $c_1+c_2+c_3+3=ab+bc+ca$.	2p

Subiectul 2

Fie M mijlocul segmentului AB. De aceeași parte a dreptei AB se consideră semidreptele $[MN$ și $[MP$ astfel încât $[MN$ este bisectoarea unghiului BMP și $[MP$ este bisectoarea unghiului AMN. Dacă $[MN]\equiv[MP]$, arătați că $\Delta ABP\equiv\Delta BAN$.

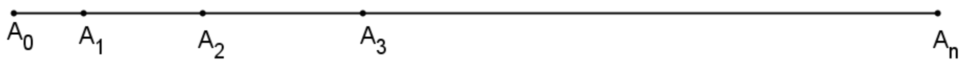
Autor: * * *

Detalii rezolvare	Barem asociat
	
$[MN$ bisectoarea unghiului BMP implică $\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle NMP$ (1) $[MP$ bisectoarea unghiului AMN implică $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle NMP$ (2) Din (1) și (2) rezultă $m(\sphericalangle BMN) = m(\sphericalangle NMP) = m(\sphericalangle PMA) = 60^0$	3p
$\Delta MBN \equiv \Delta MAP$ (LUL); $[MB] \equiv [MA]$ (ip), $[MN] \equiv [MP]$ (ip), $\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle AMP$ (dem). Obținem $[NB] \equiv [PA]$ (3) și $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle MAP$ (4)	2p
$\Delta ABP \equiv \Delta BAN$ (LUL); $[NB] \equiv [PA]$ (din 3), $\sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle MAP$ (din 4), $[AB] \equiv [AB]$ (latură comună).	2p

Subiectul 3

Pe o dreaptă d considerăm punctele $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n$, în această ordine, astfel încât $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, $A_2A_3 = 2^2$ cm, $A_3A_4 = 2^3$ cm, ..., $A_{n-1}A_n = 2^{n-1}$ cm. Arătați că nu există $p \in \{0,1,2,...,n\}$ astfel încât A_p să fie mijlocul segmentului A_iA_j, oricare ar fi $i, j \in \{0,1,2,...,n\}$, $i < j$.

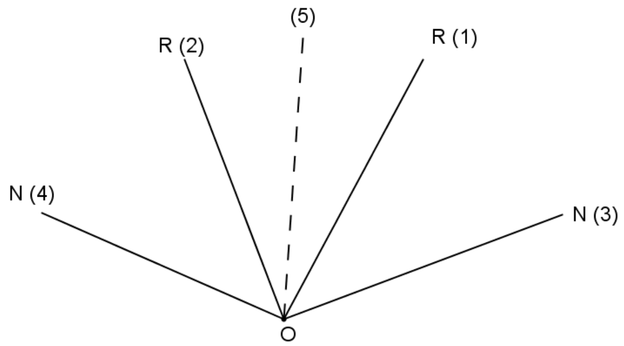
Autor: Ion Cicu, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
	
Lungimea unui segment A_0A_k este $A_0A_k = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{k-1}A_k$ adică $A_0A_k = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$, iar lungimea unui segment A_kA_m cu $k < m$ este $A_kA_m = A_0A_m - A_0A_k = 2^m - 2^k$.	4p
Presupunem că există $p \in \{0,1,2,...,n\}$ astfel încât A_p să fie mijlocul segmentului A_iA_j, pentru $i, j \in \{0,1,2,...,n\}$, $i < j$. Atunci $[A_iA_p] \equiv [A_pA_j]$ de unde $2^p - 2^i = 2^j - 2^p$ cu $i < p < j$	1p
Împărțind ultima relație prin 2^i obținem $2^{p-i} - 1 = 2^{j-i} - 2^{p-i}$, adică un număr impar este egal cu un număr par. Contradicție. Prin urmare presupunerea făcută este falsă. În concluzie nu există $p \in \{0,1,2,...,n\}$ astfel încât A_p să fie mijlocul segmentului A_iA_j, oricare ar fi $i, j \in \{0,1,2,...,n\}$, $i < j$.	2p

Subiectul 4

Fie O un punct în plan. Se consideră toate semidreptele cu originea în O, care se colorează în roșu sau în negru. Arătați că există trei semidrepte $[OA, [OB, [OC$ în aceeași culoare astfel încât $[OB$ să fie bisectoarea unghiului AOC.

Autor: GMB11/2015

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
 În figura de mai sus R reprezintă culoarea roșie, N reprezintă culoarea neagră, iar numerele din paranteză indică momentul desenării. Considerăm două semidrepte de aceeași culoare, să zicem roșu. Semidreptele (1) și (2) le presupunem roșii. Considerăm acum semidreapta (3) care formează cu semidreapta (1) un unghi congruent cu unghiul format de semidreptele (1) și (2). Semidreapta (3) poate fi roșie sau neagră. Dacă semidreapta (3) este roșie am terminat problema, semidrepta (1) este $[OB$, iar semidreptele (2) și (3) sunt $[OA$ și $[OC$. Dacă (3) este neagră construim semidreapta (4) care formează cu semidreapta (2) un unghi congruent cu unghiul format de semidreptele (1) și (2). Semidreapta (4) poate fi roșie sau neagră. Dacă (4) este roșie, atunci $(2)=[OB$, $(1)=[OA$ și $(4)=[OC$.	4p
Dacă semidreapta (4) este neagră construim semidreapta (5) ca bisectoare a unghiului format de semidreptele (1) și (2). Dacă semidreapta (5) este roșie, atunci (1), (2) și (5) verifică cerința problemei; $(5)=[OB$, $(1)=[OA$ și $(2)=[OC$. Dacă (5) este neagră, atunci (3), (4) și (5) verifică cerința problemei; $(5)=[OB$, $(3)=[OA$ și $(4)=[OC$.	3p