MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016

CLASA a VII-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră numerele raționale $a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+......+\frac{1}{2015\cdot 2016}$

$$b=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+......+\frac{1}{2016\cdot 2017}$$

a) Comparați numerele a și b.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale pozitive ecuația $|x-b| = a$.

c) Stabiliți dacă : i) există $n\in N^*$ astfel încât nb și na să fie simultan numere naturale ?

ii) există $n\in N^*$ astfel încât nb și na să fie numere naturale consecutive?

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\sqrt{x^2-1900}=\left|\frac{x}{4}-4\right|-\sqrt{2017-x^2}$.

(Gazeta Matematică)

3. Fie Δ ABC cu AB≠AC, G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în Δ ABC astfel încât GI | | BC.

a) Dacă AF este bisectoarea unghiului A, $F\in(BC)$, demonstrați că AI = 2 IF ;

b) Demonstrați că AB + AC = 2 BC.

4. Fie ABCD un paralelogram, M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Notăm $AC \cap DM = \{E\}$ si $MN \cap BE = \{T\}$. Știind că $DM \perp AC$ și $DA\perp AT$:

a) Determinați m($\sphericalangle$ ADM) .

b) Demonstrați că Δ ANB este isoscel.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016
CLASA a VII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1: Se consideră numerele raționale $a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+......+\frac{1}{2015\cdot 2016}$

$$b=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+......+\frac{1}{2016\cdot 2017}$$

a) Comparați numerele a și b.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale pozitive ecuația $|x-b|=a$.

c) Stabiliți dacă : i) există $n\in N^*$ astfel încât nb și na să fie simultan numere naturale ?

ii) există $n\in N^*$ astfel încât nb și na să fie numere naturale consecutive?

Autor: prof.Preda Traian

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) a și b au câte 1008 termeni $\frac{1}{1\cdot 2}>\frac{1}{2\cdot 3};\frac{1}{3\cdot 4}>\frac{1}{4\cdot 5};......;\frac{1}{2015\cdot 2016}>\frac{1}{2016\cdot 2017}\Rightarrow a>b$	1p
b) $x-b\in\{-a;a\}\Rightarrow x\in\{b-a;b+a\}$	1p
$b-a<0$ nu convine	1p
$x=b+a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+...+\frac{1}{2015\cdot 2016}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{2016\cdot 2017}=$ $=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+.....+\frac{1}{2016\cdot 2017}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2017}=\frac{2016}{2017}$	1p
c) i) Pentru un număr ce verifică cerința. De exemplu n=2017!	1p
ii) a>b $\Rightarrow$na=k+1, nb=k $\Rightarrow$na+nb=2k+1 $\Rightarrow$n(a+b)=2k+1	1p
$n\cdot\frac{2016}{2017}=2k+1\Rightarrow$2016n=(2k+1)2017 $\Rightarrow$ par = impar $\Rightarrow$contradicție	1p

Subiectul 2: Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$\sqrt{x^2-1900}=\left|\frac{x}{4}-4\right|-\sqrt{2017-x^2}\ .$$

Autor: Gazeta Matematica nr 11/ 2015

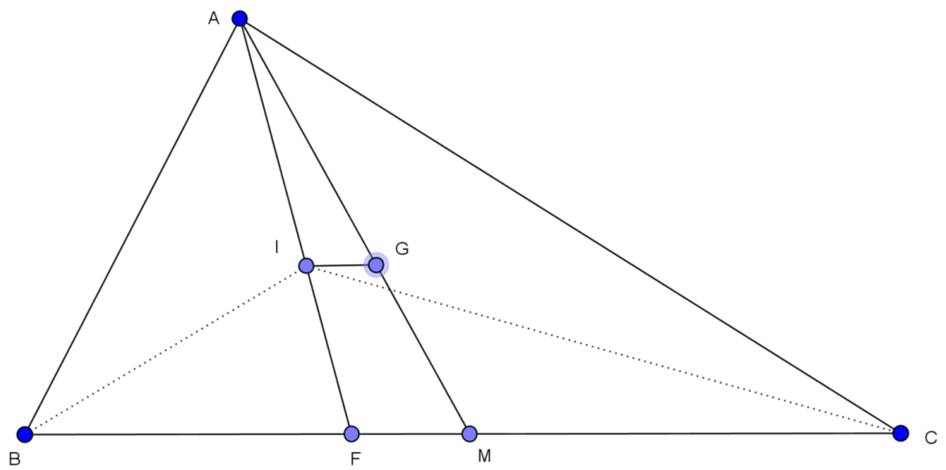
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\in Q$; $a;b\in \mathrm{N} \Rightarrow$ a,b pătrate perfecte	1p
x^2-1900 si $2017-x^2$ pătrate perfecte	1p
$1900\leq x^2 \leq 2017$	1p
$x^2=1936$	1p
$x \in \{-44;44\}$	1p
x= 44 nu verifică	1p
x= - 44 soluție unică	1p

Subiectul 3 : Fie Δ ABC cu AB≠AC, G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în Δ ABC astfel încât GI | | BC.

a) Dacă AF este bisectoarea unghiului A, F $\in$(BC), demonstrați că AI = 2 IF ;

b) Demonstrați că AB + AC = 2 BC.

Autor: prof. Olteanu Cristian



Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) În Δ AMF, GI | | MF $\Rightarrow$ conform Thales $\frac{AI}{IF}=\frac{AG}{GM}$	1p
G centrul de greutate $\Rightarrow \frac{AI}{IF}=2 \Rightarrow$ AI = 2 IF	1p

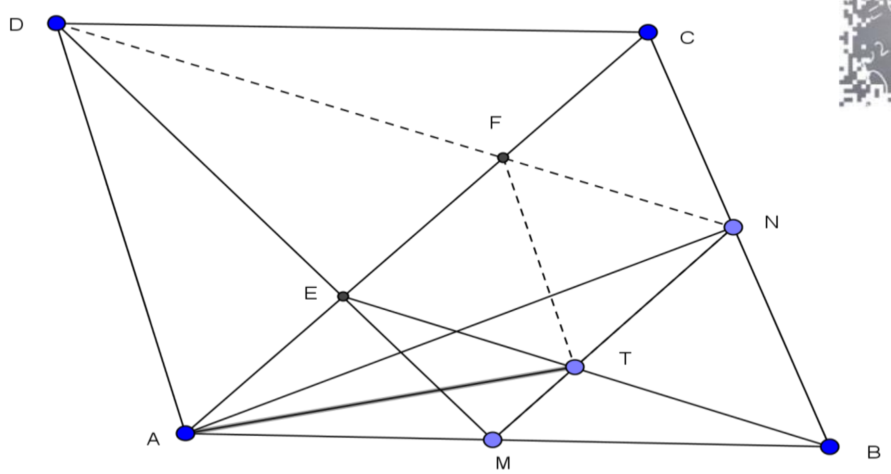
b) Folosind teorema bisectoarei în ΔABF și ΔAFC $\Rightarrow \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{AI}{IF} = 2$ și $\dfrac{AC}{CF} = \dfrac{AI}{IF} = 2$	2p
AB = 2 BF; AC = 2 CF	2p
AB+AC=2(BF +FC)=2 BC	1p

Subiectul 4 : Fie ABCD un paralelogram, M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Notăm AC $\cap$ DM = {E} şi MN $\cap$ BE = {T}. Ştiind că DM $\perp$ AC şi DA$\perp$ AT :

a) Determinați m ($\sphericalangle$ADM) .

b) Demonstrați că Δ ANB este isoscel.

Autor: Prof. Preda Traian



Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm AC$\cap$DN = {F} $\Rightarrow \dfrac{CF}{FA} = \dfrac{CN}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$CF=$\dfrac{1}{3}AC$; $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AM}{CD} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$AE=$\dfrac{1}{3}AC$ $\Rightarrow$ AE=EF=FC	2p
DE înalțime și mediană în Δ ADF $\Rightarrow$ Δ DAF isoscel	1p
FT linie mijlocie în Δ BEC $\Rightarrow$ FT || BC, AT $\perp$ AD $\Rightarrow$ AT$\perp$ TF $\Rightarrow$ Δ ATF dreptunghic $\Rightarrow$ TE mediană $\Rightarrow$ (TE) $\equiv$ (AE) $\equiv$(EF) $\sphericalangle$ DFE $\equiv$ $\sphericalangle$FET (alterne interne); $\sphericalangle$ DFE $\equiv$ $\sphericalangle$DAF	1p
m ($\sphericalangle$ FET) = 2m ($\sphericalangle$EAT) $\Rightarrow$ 3m($\sphericalangle$EAT) = 90^0 $\Rightarrow$ m ($\sphericalangle$EAT) = 30^0 $\Rightarrow$ m($\sphericalangle$ADM) = 30^0	1p
m ($\sphericalangle$DAF) = 60^0 , ΔDAF isoscel $\Rightarrow$ ΔDAF echilateral $\Rightarrow$ ΔCFN echilateral $\Rightarrow$ DN=AC $\Rightarrow$ANCD trapez isoscel $\Rightarrow$AN=CD=AB $\Rightarrow$ ΔABN isoscel.	2p