OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016 -

CLASA A VIII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră două numere reale, x şi y, care verifică egalitatea $4x^2+4y^2+16x-12y+21=0$. Arătaţi că $|2x-2y+7|\le 4$.
Daţi exemplu de o pereche de numere reale, (x,y), pentru care inegalitatea din concluzie devine egalitate.

Suplimentul Gazetei Matematice

2. Pentru fiecare $a\in\mathbb{Z}$ se consideră mulţimea $S_a=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{x^2-a^2}\in\mathbb{Z},\ |x|\ne|a|\right\}$.

a) Determinaţi valorile lui a pentru care mulţimea S_a conţine numărul $\sqrt{2}$;

b) Determinaţi $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $S_a\cap\mathbb{Q}\ne\varnothing$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^2+16x+55=3^{y^2-2y}$.

4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care punctul O este centrul feţei $ADD'A'$, punctul N este mijlocul muchiei $[C'D']$, punctul M este mijlocul muchiei $[AD]$, iar $P\in(MB)$ astfel încât $m\left(\widehat{D'P,(ABC)}\right)=45^\circ$. Arătaţi că $OB'\perp(CPN)$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016 -

CLASA A VIII-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Se consideră două numere reale, x şi y, care verifică egalitatea $4x^2+4y^2+16x-12y+21=0$. Arătaţi că $|2x-2y+7|\le 4$.

Daţi exemplu de o pereche de numere reale, (x,y), pentru care inegalitatea din concluzie devine egalitate.

prof. Vasile Scurtu,Bistriţa

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Egalitatea din enunţ se scrie echivalent $4(x+2)^2+(2y-3)^2=4$	**2p**
Deducem că $4(x+2)^2\le 4$, echivalent cu $\|x+2\|\le 1$ sau $-1\le x+2\le 1$. Prin urmare, $-2\le 2x+4\le 2$.(1) Deasemenea obţinem $(2y-3)^2\le 4$, echivalent cu $\|2y-3\|\le 2$ sau $-2\le 2y-3\le 2$, de unde, înmulţind cu -1, avem $-2\le -2y+3\le 2$.(2)	**3p**
Din (1) şi (2), prin adunare membru cu membru, obţinem $-4\le 2x-2y+7\le 4$, echivalent cu $\|2x-2y+7\|\le 4$.	**1p**
Exemplu $(x,y)=\left(-2,\frac{1}{2}\right)$	**1p**

Subiectul 2. Pentru fiecare $a\in\mathbb{Z}$ se consideră mulţimea $S_a=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{x^2-a^2}\in\mathbb{Z}, |x|\ne|a|\right\}$.

a) Determinaţi valorile lui a pentru care mulţimea S_a conţine numărul $\sqrt{2}$;

b) Determinaţi $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $S_a\cap\mathbb{Q}\ne\varnothing$.

prof. Petre Simion şi prof. Victor Nicolae, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Avem $\sqrt{2}\in S_a$ echivalent cu faptul că există $k\in\mathbb{Z}^*$ astfel încât $\frac{1}{2-a^2}=k$. Deducem că $a^2+\frac{1}{k}=2\in\mathbb{Z}$. Înseamnă că $\frac{1}{k}\in\mathbb{Z}$, deci $k\in\{\pm 1\}$. Pentru $k=-1$, obţinem $a^2=3$, contradicţie. Pentru $k=1$, obţinem $a^2=1$, de unde obţinem $a\in\{\pm 1\}$	**2p**
b) Dacă $a\ne 0$, presupunem că $a^2+\frac{1}{k}=\frac{a^2k+1}{k}=\frac{m^2}{n^2}$, unde m şi n sunt numere naturale	**3p**

relativ prime. Cum şi numerele k şi a^2k+1 sunt relativ prime, rezultă că $n^2=k$ şi $a^2k+1=m^2$, adică $(an)^2+1=m^2$, contradicţie. Pentru $a\neq 0$ avem $S_a\cap\mathbb{Q}=\varnothing$.	
Pentru $a=0$, obţinem $x=\pm\sqrt{\frac{1}{k}},\ k\in\mathbb{Z}_+$. De exemplu, pentru $x=\frac{1}{2}$, obţinem $k=4$, deci $\frac{1}{2}\in S_0\cap\mathbb{Q}$. Prin urmare, $a=0$.	**2p**

Subiectul 3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^2+16x+55=3^{y^2-2y}$.

Prof. Mihaela Berindeanu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Ecuaţia se mai scrie $(x+5)(x+11)=3^{y^2-2y}$. Cum $(x+5)(x+11)\in\mathbb{Z}$, rezultă că $3^{y^2-2y}\in\mathbb{N}^*$, deci $y^2-2y\in\mathbb{N}^*$. Înseamnă că numerele $x+5$ şi $x+11$ sunt numere întregi simultan pozitive sau simultan negative. Deducem că $\lvert\lvert x+11\rvert-\lvert x+5\rvert\rvert=6$.	**2p**
Cum numerele $\lvert x+5\rvert$ şi $\lvert x+11\rvert$ sunt numere întregi simultan pozitive avem $\lvert x+5\rvert=3^a, a\in\mathbb{N}$ şi $\lvert x+11\rvert=3^b, b\in\mathbb{N}$, unde $a+b=y^2-2y$. Dacă, de exemplu, $b>a$, atunci $3^b-3^a=6$, echivalent cu $3^a\left(3^{b-a}-1\right)=6$. Deducem că $3^a\mid 6$, deci $a\in\{0,1\}$. Convine numai $a=1$, de unde $b=2$. Ca urmare, $y^2-2y=3$ cu soluţiile $y=3, y=-1$.	**2p**
Deci $(x+5)(x+11)=27$ Din $x+5=3$, $x+11=9$ obţinem $x=-2$ / Dacă $x+5=-9$, $x+11=-3$ obţinem $x=-14$. În final, $(x,y)\in\{(-2,3),(-2,-1),(-14,3),(-14,-1)\}$.	**3p**

Subiectul 4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care punctul O este centrul feţei $ADD'A'$, punctul N este mijlocul muchiei $[C'D']$, punctul M este mijlocul muchiei $[AD]$, iar $P\in(MB)$ astfel încât $m\left(\widehat{D'P,(ABC)}\right)=45^\circ$. Arătaţi că $OB'\perp(CPN)$.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Planul $(OB'C')$ intersectează planul (ADD') după dreapta OQ, $Q\in(DD')$. Rezultă că $OQ \parallel (B'C')$. Deducem că Q este mijlocul muchiei (DD') . Din congruenţa triunghiurilor $CC'N$ şi $C'D'Q$ (C.C.), deducem că $CN\perp C'Q$. Cum $CN\perp B'C'$, rezultă că $CN\perp(B'C'Q)$. Dar $OB'\subset(B'C'Q)$. Înseamnă că $OB'\perp CN$. (1)	**3p**
Deoarece $pr_{(ABC)}D'P=DP$, rezultă că $m\left(\widehat{D'PD}\right)=45^\circ$, prin urmare triunghiul $D'DP$ este dreptunghic isoscel cu $DP=DD'$.	**1p**
Fie $\{R\}=BM\cap CD$. Atunci $[MD]$ este linie mijlocie în triunghiul RBC, deci $RD=DC=DP$. Cum $[PD]$ este mediană în triunghiul RPC, deducem că $m\left(\widehat{CPR}\right)=90^\circ$, deci $CP\perp MB$. Dar $CP\perp BB'\parallel OM$. Deducem că $CP\perp(MBB')$ şi, cum $OB'\subset(MBB')$, rezultă că $OB'\perp CP$. (2) Din (1) şi (2) rezultă $OB'\perp(PCN)$.	**3p**