Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a V-a

Problema 1

Determinaţi numărul de forma $\overline{4abc3}$ care , împăţit la 2016 , dă restul 65.

Problema 2

a) Se ştie că $2016 = a^5 \cdot b^2 \cdot c$, $a \neq b \neq c$. Sa se afle a , b , c .

b) Să se scrie numărul 2016 ca sumă de trei pătrate perfecte.

Problema 3

a) Să se arate că numărul $x = 2016^{2015} + 2015^{2014} + 2014^{2016}$ nu este pătrat perfect.

b) Arătaţi că numărul : $A = 21^n \cdot 126 + 7^{n+1} \cdot 3^{n+4} + 7^{n+2} \cdot 3^{n+3}$ este divizibil cu 2016.

Problema 4

Determinaţi mulţimile A şi B , ştiind că $A \cup B = \{1 , 2 , 3 , 4\}$, $3 \in B \setminus A$, $A \setminus B \not\subset \{2 , 4\}$, $B \setminus A \not\subset \{2 , 3\}$ şi $A \cap B \neq \emptyset$ .Justificaţi răspunsul.

Notă

- Timp de lucru efectiv 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 5

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VI-a

Problema 1

Se consideră suma: $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$

a) Calculaţi suma divizorilor naturali ai numărului S_3.
b) Pentru $n = 99$ arătaţi că suma se divide cu cel mai mare divizor comun al numerelor 1960 şi 6800.

Problema 2

a) Să se rezolve ecuaţia: $9^{2x+1} + 9^{2x} + 9^{2x+2}$=7371
b) De la ce înălţime cade o minge care atinge de 4 ori pământul şi de fiecare dată se ridică la o înălţime egală cu jumătatea înălţimii de la care a căzut anterior, iar ultima oară se ridică la 2 m ?

Problema 3

Pe segmentul $[MA]$, astfel încât $[MT] \equiv [AE]$ şi $|MA| - |TA| = 1\ cm$. Dacă P este mijlocul segmentului $[MA]$ şi $|TP| = 3{,}5\ cm$; arătaţi că raportul segmentelor $[MP]$ şi $[TE]$ este subunitar.

Problema 4

Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ adiacente suplementare, astfel încât $m(\sphericalangle BOC) - m(\sphericalangle AOB) = 20^0$, $(OD$ este bisectoarea $\sphericalangle AOB$ şi $(OE$ este semidreapta opusă lui $(OD$.

a) Calculaţi $m(\sphericalangle EOB)$.
b) Demonstraţi că $PO \perp DE$, unde $(OP$ este bisectoarea $\sphericalangle BOC$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VII-a

Problema 1.

a) Stabiliţi dacă numărul $\sqrt{a}$ este real, unde a=$\left(-\frac{7}{8}\right):0{,}125+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

b) Determinaţi a 2016-a zecimală a numărului b, unde b=0,12122122212222...

Problema 2.

Fie $A_n=\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{2^n}}$, n$\in \boldsymbol{N}$.

a) Calculaţi $2^5-2^4-2^3-2^2-2-1$

b) Arătaţi că $A_2+A_4+A_6+\ldots+A_{2016}\in \mathbf{Q}$.

Problema 3.

Fie paralelogramul ABCD cu [AD]≡[DB], punctul E simetricul lui C faţă de B şi punctul F simetricul lui E faţă de A. Arătaţi că:

a) DE $\perp$ CD

b) punctele C, D, F sunt coliniare.

Problema 4

Fie ABC un triunghi oarecare, iar M şi D mijloacele segmentelor [AB], respectiv [BC]. Dacă E$\in$(AD) astfel încât AD=4· ED, iar {N}=ME∩BC, să se demonstreze că :

a) $[ME]\equiv[EN]$

b) $[DN]\equiv[NC]$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Arătaţi că $x=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}}\right)\cdot(\sqrt{2016}+1)$ este număr natural.

b) Arătaţi că $(a^2+1)\cdot(b^2+1) \geq 2\cdot(ab-1)\cdot(a+b)$, oricare ar fi a şi b numere naturale.

Problema 2.

a) Determinaţi numerele naturale x , y , z pentru care

$x + y + z - 21 = 2\sqrt{x-4}+4\sqrt{y-9}+6\sqrt{z-22}$. SGM 11/2014

b) Să se afle x şi y astfel încât

$\sqrt{x^2-4x+4000004}+\sqrt{y^2-6y+265}=2016$.

Problema 3.

O cameră in formă de paralelipipedul dreptunghic ABCDA′B′C′D′ are dimensiunile AB = 2m, BC = 3 m , AA′= 2,4 m , iar N este mijlocul lui [CC′]. În punctele D′ , A şi N se prinde o prelată care are forma triunghiului D′AN.

a) Să se verifice dacă prelata reprezintă ΔD′AN dreptunghic.

b) Să se afle distanţa de la punctul D′ la dreapta de intersecţie dintre planul prelatei şi planul podelei (ABC).

Problema 4.

În paralelipipedul dreptunghic ABCDA′B′C′D′ cu AB = $12\sqrt{3}$ cm, BC = 12 cm ,AA′= 18 cm se consideră pe muchia [A'B'] punctul N , astfel încât A′N = 3·B′N , P∈(AA′) şi . M∈[BC] triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

a) Demonstraţi că PN ⊥ BN.

b) Determinaţi lungimea AP. (Gazeta Matematică)

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 5

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a V-a
Soluții și bareme

1. $\overline{4abc3} = 2016 \cdot x + 65$ ……………………………………………………….2p

   $49993 : 2016 < 25$; $20003 : 2016 > 20$ ..……………………………………………2p

   $20 < c < 25$ ……………………..…...………………………………………………...1p

   $u(2016 \cdot x + 65) = 3 \Rightarrow x = 23$ ………………………………………………………..1p

   $\overline{4abc3} = 2016 \cdot 23 + 65 = 46433$ ...……………………………………..1p

2. a) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ ………………………………………..……………………..3p

   b) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2 = 12^2 \cdot 14 =$

   $= 12^2 \cdot (3^2 + 2^2 + 1^2) = 12^2 \cdot 3^2 + 12^2 \cdot 2^2 + 12^2 \cdot 1^2 =$

   $= (12 \cdot 3)^2 + (12 \cdot 2)^2 + (12 \cdot 1)^2 = 36^2 + 24^2 + 12^2$……………………………4p

3. a) $u(2016^{2015}) = 6$, $u(2015^{2014}) = 5$, $u(2014^{2016}) = 6$

   $u(x) = u[\, u(2016^{2015}) + u(2015^{2014}) + u(2014^{2016})\,] = 7$…………………2p

   Dacă ultima cifră a unui număr este 2 , 3 , 7 sau 8 ,

   atunci numărul sigur nu este pătrat perfect ………………….……………….…...1p

   b) $A = 21^n \cdot 126 + 7^n \cdot 7 \cdot 3^n \cdot 3^4 + 7^n \cdot 7^2 \cdot 3^n \cdot 3^3 =$ 1p

   $= 21^n(126 + 7 \cdot 81 + 49 \cdot 27) = 21^n \cdot 2016.$ 2p

   A divizibil cu 2016. 1p

4. $3 \in B \setminus A \Rightarrow 3 \in B$ şi $3 \notin A$. 2p

   $(A \setminus B) \not\subset \{2, 4\} \Rightarrow$ există cel puţin un element

   $x \in (A \setminus B)$ şi $x \notin \{2, 4\}$, $x \in A$ şi $x \notin B$.

   $x = 1 \in A$ şi $1 \notin B$. 1p

   $(B \setminus A) \not\subset \{2, 3\} \Rightarrow$ există cel puţin un element y astfel încât $y \in (B \setminus A)$

   şi $y \notin \{2, 3\}$.

   $y = 4 \in B$ şi $4 \notin A$. 1p

   $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow 2 \in A$ şi $2 \in B$. 2p

   $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. 1p

Observatie. *Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.*

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VI-a
Soluții și bareme

Problema 1

a) 4 puncte

1p scrierea sumei $S_3 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3$
1p calcul $S_3 = 40$
1p scrierea tuturor divizorilor lui 40
1p calculul sumei $1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 10 + 20 + 40 = 90$

b) 3 puncte

1p $S_{99} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99}$
$S_{99} = 40 \cdot (1 + 3^4 + \cdots + 3^{96}) \vdots 40$
1p $(1960; 6800) = 40$
1p S_{99} are 100 de termeni; $100 \vdots 4 \Rightarrow$ se pot forma grupe de câte 4 termeni.

Problema 2

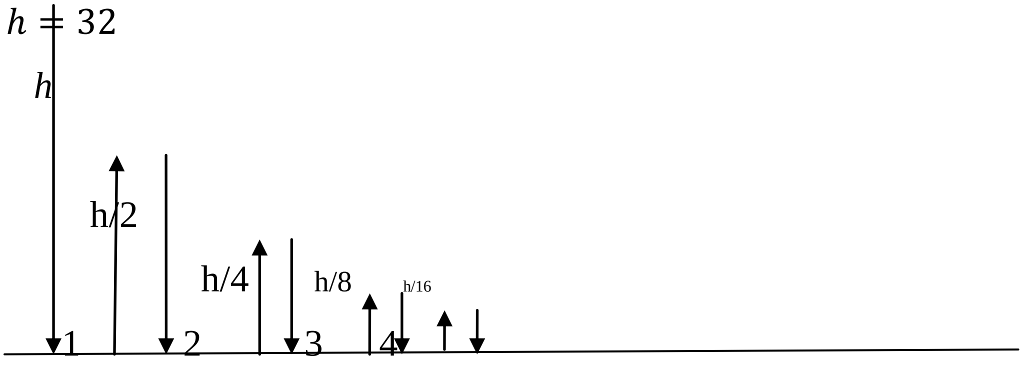
a) 4 puncte

1p $9^{2x} \cdot 9^1 + 9^{2x} + 9^{2x} \cdot 9^2 = 7371;$
1p $9^{2x} \cdot (9^1 + 1 + 9^2) = 7371 \Rightarrow 9^{2x} = 7371 : 91$
1p $9^{2x} = 81 \Rightarrow 9^{2x} = 9^2$
1p $2x = 2 \Rightarrow x = 1$

b) 3 puncte

$\mathrm{h} = 2^5$

$h = 32$



Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 5

Problema 3

1p desen realizat corect

1p $[MT] \equiv [AE]$ si $|MA| - |TA| = 1\ cm \Longrightarrow |MT| = |EA| = 1\ cm$

1p P mijlocul $[MA] \Longrightarrow |MP| = |PA| = |MT| + |TP| = 1\ cm + 3{,}5\ cm = 4{,}5\ cm$;.

1p $|PE| = |PA| - |EA| = 4{,}5\ cm - 1\ cm = 3{,}5\ cm$

1p $|TE| = 7\ cm$

1p finalizare

Problema 4

a) 4 puncte

1p desen realizat corect

1p $m(\sphericalangle BOC) = 100^0$; $m(\sphericalangle AOC) = 180^0$

1p $m(\sphericalangle AOB) = 80^0$

1p $m(\sphericalangle EOB) = 140^0$

a) 3 puncte

1p pentru aflarea $m(\sphericalangle BOP) = 50^0$

1p pentru aflarea $m(\sphericalangle POD) = 90^0$

1p finalizare $PO \perp DE$

Observatie. *Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.*

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 5

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VII-a
Soluții și bareme

Subiectul 1.

a) (4 puncte)

$a=-\frac{3}{4}$ **3p**

a<0, deci nu există $\sqrt{a}$ **1p**

b) (3 puncte)

Însumând zecimalele astfel încât să ne apropiem de numărul 2016 şi observând că 1+2+3+...+63=2016, deducem că pentru 63 cifre de 1 se adaugă 2016 cifre de 2, deci ar trebui să avem 62 de 1, ceea ce ar însemna 62 + 62·63 : 2 zecimale, adică 2015 în total (cifre de 1 si de 2)...**2p**

$b=1\underbrace{2}_{1}\ 1\ \underbrace{22}_{2}\ 1\ \underbrace{222}_{3}\ 1.......1\ \underbrace{22...2}_{62}1\ ....$

Prin urmare, a 2016-a zecimală va fi 1...**1p**

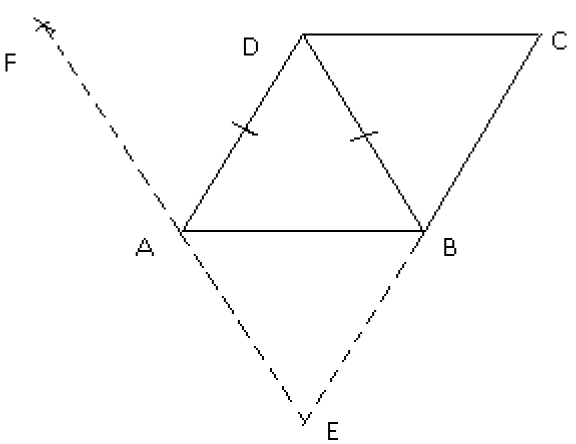
Subiectul 2.

a) $2^5-2^4-2^3-2^2-2-1=2^4(2-1)-2^3-2^2-2-1=2^3(2-1)-4-2-1=1$...**3p**

b) Aducând la acelaşi numitor fracţiile de sub radical se obţine rezultatul $1/2^n$ **2p**

Pentru n număr par, A_n reprezintă un număr raţional, deci fiecare termen al sumei este raţional, aşadar $A_2+A_4+A_6+...+A_{2016}\in \mathbb{Q}$ **2p**

Subiectul 3.



a) ABCD fiind paralelogram rezultă AD ∥ BC și [AD]≡[BC], iar din simetria punctelor E și C față de B obținem [BE]≡[BC], de unde rezultă [AD]≡[BE] și cum AD∥ BE, patrulaterul ADBE va fi paralelogram **2p**

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 5

Cum [AD]≡[DB] din ipoteză, deducem că ADBE este romb, deci DE⊥AB.................**1p**

Dar AB∥ DC, deci DE⊥CD..**1p**

b) Din ADEB romb⇒DB∥AE şi [DB]≡[AE] (1)

Cum F=sim$_A$ E⇒[AF]≡[AE] şi F∈ AB (2) **1p**

Din (1) şi (2) se obţine DB∥AF şi [DB]≡[AF] , deci ABDF este paralelogram

⇒FD∥AB...**1p**

Prin punctul D, exterior dreptei AB, trec dreptele DC∥AB (ABCD este paralelogram) şi DF∥AB (ABDF paralelogram). Conform axiomei lui Euclid, prin D trece o singură paralelă la AB, deci dreptele DC şi DF coincid, aşadar punctele C,D,F sunt coliniare....**1p**

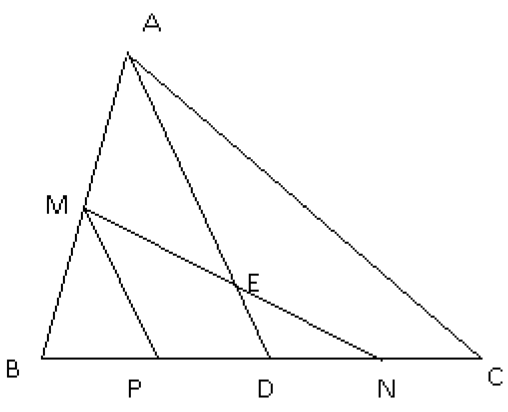
Subiectul 4.

a) Fie P mijlocul lui [BD]. În ΔABD, [MP] este linie mijlocie, deci MP∥ AD

şi MP=AD/2..**2p**

Cum ED=AD/4, rezultă ED=MP/2 şi din ED∥MP, deducem că [ED] este linie mijlocie în triunghiul MNP...**1p**

Atunci E este mijlocul lui [MN] ⇒ [ME]≡[EN]..**1p**



b) [ED] este linie mijlocie în ΔMPN ⇒[PD]≡[DN]...**1p**

PD=BD/2=DC/2, deci DN=DC/2...**1p**

Rezultă că N este mijlocul lui [DC], deci [DN]≡[NC]..**1p**

***Observatie**. Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.*

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VIII-a
Soluții și bareme

1. a) $x=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}}\right)\cdot(\sqrt{2016}+1)=$

$=(\sqrt{2016}-1)\,(\sqrt{2016}+1)=2015\in N$ 3p

b) $(a^2+1)\cdot(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1=(ab-1)^2+(a+b)^2\geq$

$\geq\ 2\sqrt{(ab-1)^2(a+b)^2}=2(ab-1)(a+b).$..4p

2. a) $(\sqrt{x-4}-1)^2+(\sqrt{y-4}-2)^2+(\sqrt{z-22}-3)^2=0.$..2p

finalizare 1p

b) $(\sqrt{x^2-4x+4+200^2}+\sqrt{y^2-6y+9+16^2}=2016$.................... ....2p

$(\sqrt{(x-2)^2+200^2}+\sqrt{(y-3)^2+16^2}=2016$ 1p

finalizare 1p

3. a) Se calculează laturile şi se demonstrează că Δ nu este dr. 3p

b) Aflarea dreptei de intersecţie 2p

Calculul distanţei. 2p

4. a) $BC\perp(ABB')$, $PN\subset(ABB')\Rightarrow BC\perp PN$

$PN\perp BC$, $PN\perp MN\Rightarrow PN\perp(BMN)\Rightarrow PN\perp BN.$ 4p

b) $\Delta PNB=\Delta$dr. Not: $AP=x$. $(18-x)^2+243+351=x^2+432.$ 2p

$AP=13{,}5$cm. 1p

Observatie. *Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.*

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 5