Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a IX-a M_1

Problema 1

Fie $a,b,c\in\left[\frac{1}{6},\infty\right)$ şi $a+b+c=1$.

Să se arate că $\sqrt{6a-1}+\sqrt{6b-1}+\sqrt{6c-1}\le 3$.

Problema 2

Să se rezolve ecuaţia: $|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-2015|=2016(x-2016)$.

Problema 3

În Δ ABC se consideră punctele M, N şi P pe laturile AB, AC respectiv BC astfel încât

$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PC}=\frac{2}{9}\overrightarrow{PB}$.

a) Exprimaţi $\overrightarrow{BN}$ în funcţie de $\overrightarrow{BA}$ *şi* $\overrightarrow{BC}$

b) Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare

Problema 4

Arătaţi că:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a X-a M_1

Problema 1

Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2[x]+\{x\}$ este injectivă, unde $[x],\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x.

Problema 2

Fie $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ şi $z_1z_2z_3\neq -1$. Să se arate că:

$$z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{1+z_1z_2z_3}\in\mathbb{R}$$

.

Problema 3

a). Să se verifice egalitatea: $\log_{a_1} a_2\cdot\log_{a_2} a_3\cdot\log_{a_3} a_4\cdot\ldots\cdot\log_{a_n} a_1=1$, unde $a_i\in\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}, \mathrm{i}=\overline{1,n}$, $\mathrm{n}\in\mathbb{N}, \mathrm{n}\geq 2$

b). Să se demonstreze că: $\dfrac{1}{\log_{a_1} a_2}+\dfrac{1}{\log_{a_2} a_3}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{a_n} a_1}\geq n$, unde $a_1,a_2,\ldots,a_n\in(0,1)$ sau $a_1,a_2,\ldots,a_n\in(1,\infty)$.

Problema 4

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuaţia: $\sqrt{-x^2+4x-3}+2^{x+1}+4^{x-1}=5$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XI-a M_1

Problema 1

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n+1, n^2+1), n \in \mathbb{N}$ și $O(0,0)$.

a) Calculați aria triunghiului OA_nA_{n+1}.

b) Notăm cu $f(n)$ aria triunghiului OA_nA_{n+1}. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n)$ este minimă.

Problema 2

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+n+1}\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Problema 3

Fie $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați AB și BA.

b) Arătaţi că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ şi$(\forall)a \in \mathbb{R}$.

Problema 4

Să se studieze monotonia și mărginirea șirului $(x_n)_n$, definit prin:

$x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$ şi să se determine limita şirului (dacă aceasta există).

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XII-a M_1

Problema 1

Arătați că valoarea integralei $\int_0^1 \frac{(1+x)^{2009}+(1-x)^{2009}}{1+x^2}dx$ este un număr iraţional.

Problema 2

Să se calculeze integralele $I=\int \frac{e^x+4x^2+10x+4}{e^x+8x^2+4x+4}dx$ si $J=\int \frac{4x^2-6x}{e^x+8x^2+4x+4}dx.$

Problema 3

Fie $a>0$ și $G=(-a,a)$.Pe G se definește legea de compoziție $x*y=\frac{a^2\cdot(x+y)}{a^2+xy}$.

a) Arătați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Se definește funcția$f:G\to\mathbb{R}$, f(t)=F(t)-F(0), $(\forall)x\in\mathbb{R}$,unde F este primitiva a funcției $g:G\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{a^2-x^2}$, $(\forall)$ $x\in G$. Demonstrați că f este izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\mathbb{R},+)$.

Problema 4

Fie $H=\{A\in M_2(\mathbb{R})|A^t\cdot A=I_2\}$,unde A^t este transpusa matricei A. Demonstrați că :

a) $(\forall)A\in H\Rightarrow \det A\in\{-1,1\}$.

b) $(H,\cdot)$este subgrup al grupului $(M,\cdot)$, unde $M=\{X\in M_2(\mathbb{R})|detA\neq 0\}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a IX-a M_2

Problema 1

Rezolvați sistemul : $\begin{cases} 2|x-y|+3|x+1|=7 \\ 3|x-y|+2|x+1|=8 \end{cases}$.

Problema 2

a) Demonstrați că numerele $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Să se determine progresia aritmetică, cu proprietatea că suma primilor *n* termeni ai săi este dată de formula : $S_n = 5n^2 + 6n$.

Problema 3

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției :" Numărul n^2+n+41 este prim pentru $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$". Justificați răspunsul.

b)Demonstrați prin inducție matematică următoarea egalitate :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

.

Problema 4

Se consideră paralelogramul ABCD și punctele E și F astfel încat $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$.

Să se demonstreze că punctele A, F si C sunt coliniare.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

impiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a X-a M_2

Problema 1

a) Arătați că numerele $p=\log_9 25-\log_3 10+\log_3 18$ și $q=8^{\log_2 \sqrt[3]{5}}$ sunt întregi.

b) Să se arate că următoarea expresie este constantă :

$$A=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}-\frac{2}{3\left(\log_x 2\right)^2}\ .$$

Problema 2

a) Determinați numărul real m pentru care numărul $z=5i^5+4mi^4+3mi^3+2i^2+mi$ este real.

b) Să se determine $z\in\mathbb{C}$ știind că $\dfrac{\overline{z}+7i}{z}=6$.

Problema 3

a) Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+9$ și $g(x)=(2m+1)x+3$.

Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $g=f^{-1}$, unde f^{-1} este inversa funcției f.

b) Să se determine funcția putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n$ unde $n\in\mathbb{N}^*$, știind că $f(4)+f(2)=20$.

Problema 4

a) Arătați că dacă $p\in\mathbb{R}$ și $\sqrt{2p+6}=4$, atunci $\sqrt[3]{5p+2}\in\mathbb{R}$

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația irațională : $\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{11-x}=2$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XI-a M_2

Problema 1

Determinați numerele reale a și b astfel încât să avem:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=\frac{3}{2}.$$

Problema 2

Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$, știind că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_9$ sunt în progresie aritmetică.

Problema 3

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{ax^2+bx+1}$, $a,b\in\mathbb{R}$

a) Determinați $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât dreapta de ecuație $y=x-2$ să fie asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Pentru $a=1$ și $b=2$, stabiliți dacă graficul funcției admite și alte asimptote.

Problema 4

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$

a) Determinați matricele $A^2(1)$ și $A^3(1)$.

b) Determinați inversa matricei $C=A(1)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XII-a M_2

Problema 1

Fie $M = (0, \infty)$ și $a, b \in M$. Definim legea de compoziție $a \circ b = \ln\left(e^a + e^b - 1\right)$.

a) Să se arate că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $\circ$.

b) Arătați că legea $\circ$ este asociativă.

Problema 2

Fie. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R},\ 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$

Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

Problema 3

Fie$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați I_1 și I_2.

b) Arătați că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Problema 4

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & , x \le 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b & , x > 1 \end{cases}$ să fie o primitivă pentru o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) Aflați funcția f.

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.