SUBIECTE STRUCTURATE TIP BAC

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Analiză matematică, clasa a XII-a

Selecție realizată de Silviu Boga, profesor, Iași

100 probleme de analiză matematica tip BAC – clasa a XII-a

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Problema 1

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+e^x, & x\le 0 \\ \sqrt{x}+1, & x>0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} x f(x)\,dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$.

Problema 2

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$ și $F(x)=(x-1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$

c) Să se demonstreze că $\int_{1}^{x}\frac{f(t)f''(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$, pentru orice $x>1$.

Problema 3

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e\cdot e^x, & x\le -1 \\ 2+x, & x>-1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x),\ x\in[0,2]$.

c) Să se calculeze $\int_{-2}^{0}\frac{x f(x)}{e}dx$.

Problema 4

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

a) Să se calculeze $\int_{0}^{1} g(x)\,dx$.

b) Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\int_{1}^{a}\left(g(x)-x^3\right)\cdot e^x dx=6e^a$.

c) Să se calculeze $\int_{0}^{1}\left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)\,dx$.

Problema 5

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuați $x=0$ și $x=1$.

b) Folosind faptul că $x^2+e^{-x^2}\ge 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_{0}^{1}e^{-x^2}dx\ge\frac{2}{3}$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+f(-x)$.

Problema 6

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+e^x+1$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcției *f* este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=e+\frac{1}{3}$.

Problema 7

2. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x)\,dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) Să se determine numărul real $a\in\left(1,e^2\right)$ astfel încât aria suprafeței plane, determinate de graficul funcției *f*, axa *Ox*, dreptele de ecuații $x=a$ și $x=e^2$, să fie egală cu $\ln\frac{3}{2}$.

Problema 8

2. Se consideră funcțiile $f_m:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\int f_1(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x)\,dx$.

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x)\,dx=\frac{3}{2}$.

Problema 9

2. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1\frac{x^n+1}{x+1}\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Folosind, eventual, faptul că $x^2\le x$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se demonstreze că $I_2\le I_1$.

c) Să se demonstreze că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}+2\ln 2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 10

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ și $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

a) Să se verifice că funcția *g* este o primitivă a funcției *f*.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Problema 11

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$.

a) Să se calculeze $\int_1^e (f(x)-\frac{\ln x}{x})\,dx$.

b) Să se verifice că $\int_1^e f(x)\,dx=\frac{e^2}{2}$.

c) Să se arate că şirul care are termenul general $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-x\right)dx,\ n\ge 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

Problema 12

2. Se consideră $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx,\ n\in\mathbb{N}.$

a) Să se verifice că $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Problema 13

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$ şi $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

a) Să se arate că $F(x)=-f(x)+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=F(x)-f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

Problema 14

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 (x-f(x)+\ln x)^2\,dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1,+\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[1,e]\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)+x$ axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=e$.

Problema 15

2. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+\ln x$.

a) Ştiind că $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\ln x$, să se verifice că $\int g(x)dx=g(x)+\mathcal{C},\ x>0$.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e xf\left(x^2\right)dx=\frac{e^{e^2}+e^2-e+1}{2}$.

Problema 16

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=e^x\sqrt{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=e-1$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=xe^{-x}f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)\,dx$.

Problema 17

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e x\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx=-\frac{22}{81}$.

Problema 18

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}dx$.

a) Să se verifice că $I_0=1$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Folosind, eventual, faptul că $1\le \ln x\le 2$ oricare ar fi $x\in\left[e,e^2\right]$, să se demonstreze că

$1\le\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\le 2^n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Problema 19

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $\int_2^e\left(f(x)-\frac{1}{x-1}\right)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă *F* a funcției *f* este concavă pe $[2;+\infty)$.

c) Să se determine a real, $a>2$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției *f*, axa O şi dreptele de ecuații $x=2$ şi $x=a$, să fie egală cu $\ln 3$.

Problema 20

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=3^{-x}$.

c) Să se arate că orice primitivă F a funcției *f* este concavă pe $(-\infty,0]$ şi convexă pe $[0,+\infty)$.

Problema 21

2. Se consideră funcțiile $f, g:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ şi $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f+g$.

b) Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x)+g^2(x))\,dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$.

c) Folosind eventual faptul că $2ab \le a^2 + b^2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x}\,dx \le \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}$.

Problema 22

2. Se consideră funcția $f:[-4,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x)\,dx$.

b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)}\,dx = 0$.

c) Să se demonstreze că $0 \le \int_0^m f(x)\,dx \le 8$, oricare ar fi $m \in [0,2]$.

Problema 23

2. Se consideră funcțiile $f, F:[1,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ şi $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 f\left(e^x\right)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x)\,dxt = \frac{(3\ln 2 - 1)^2}{2}$.

Problema 24

2. Fie $I_n = \int_1^2 x^n e^x\,dx$, pentru $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_1 = e^2$.

c) Să se demonstreze că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e\left(2^{n+1}e - 1\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Problema 25

2. Se consideră funcțiile $f, g:(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \ln x$ şi $g(x) = x\ln x$.

a) Să se arate că g este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 1$ şi $x = e$.

Problema 26

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+mx^2+nx+p$, unde $m,n,p\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $m=0,\ n=-3,\ p=2$, să se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

b) Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$, știind că $f'(-1)=f'(1)=0$ și $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=4$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\int\limits_0^x f(t)dt$.

Problema 27

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1004}+2009^x$.

a) Să se determine $\int f(x)\,dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\int\limits_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

Problema 28

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

a) Să se determine $\int\left(x^2+1\right)\cdot f(x)\,dx$.

b) Să se verifice că $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\ln(2e)$.

c) Să se arate că $\int\limits_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e(e-1)$.

Problema 29

2. Se consideră integralele $I=\int\limits_0^1\dfrac{e^x}{x+1}dx$ și $J=\int\limits_0^1\dfrac{xe^x}{x+1}dx$.

a) Să se verifice că $I+J=e-1$.

b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $J\geq\dfrac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că $I=\dfrac{e-2}{2}+\int\limits_0^1\dfrac{e^x}{(x+1)^2}dx$.

Problema 30

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n=\int\limits_0^1\dfrac{x^n}{x+1}dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Utilizând, eventual, inegalitatea $\dfrac{x^n}{2}\leq\dfrac{x^n}{x+1}\leq x^n$, adevărată pentru orice $x\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\leq 2010\cdot I_{2009}\leq 1$.

Problema 31

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x)\,dx=2e-1$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}\,dx$.

Problema 32

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ e^x+1, & x\geq 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 x f(x^2)\,dx=\frac{e}{2}$.

Problema 33

2. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n\,dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Utilizând faptul că $(1+x)^n\leq(1+x)^{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și $x\in[0,1]$, să se arate că $I_{2009}\geq I_{2008}$.

c) Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n=(1+x)^{n+1}-(1+x)^n$, adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$ și $x\in\mathbb{R}$, să se arate că $I_n=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

Problema 34

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x\ln x$ și $g(x)=2x+\ln x+1$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)\,dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Problema 35

2. Se consideră funcțiile $f,\ F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+3x^2+2$ și $F(x)=e^x+x^3+2x-1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 \left(xf(x)+F(x)\right)dx=F(1)$.

Problema 36

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x,\ g(x)=1-x+x^2-x^3+...+x^{2008}-x^{2009}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f.

c) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)g(x)\,dx<1$.

Problema 37

2. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ și $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f'(x)dx=\ln 2$.

b) Să se demonstreze că $\int g(x)dx=f(x)+\mathcal{C}$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{g(x)}{f^2(x)}dx$.

Problema 38

2. Se consideră $I_n=\int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_n\le I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

c) Să se demonstreze că are loc relația $I_n=\dfrac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 39

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x-1, & x\ge 1\\ -x+1, & x<1\end{cases}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

b) Să se determine $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 xf\left(e^x\right)dx$.

Problema 40

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$ și $g(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\ln x$.

a) Să se arate că $\int_1^4 f(x)dx=\ln 4+2$.

b) Să se verifice că $\int_1^4 g(x)dx=\ln 4-\dfrac{3}{4}$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f\left(x^2\right)\cdot g\left(x^2\right)dx$.

Problema 41

2. Se consideră funcțiile $f, F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ și $F(x)=x-\ln x$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)\,dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Problema 42

2. Se consideră funcțiile $f, g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ și $g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,g(x)\,dx$.

c) Să se determine numărul real $a\in(1;+\infty)$ astfel încât $\int_1^a f(x)\,dx=2$.

Problema 43

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei Ox, a graficelor funcțiilor $g, h:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ și $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sunt egale.

Problema 44

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=e-\dfrac{3}{2}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c) Să se arate că dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $\int_e^{e^2}\dfrac{f(\ln x)}{x}\,dx=F(2)-F(1)$.

Problema 45

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră $I_n=\int_2^3\dfrac{x^n}{x^2-1}\,dx$.

a) Să se arate că $I_0=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Problema 46

2. Se consideră funcțiile $f, g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ şi $g(x)=x\ln x$.

a) Să se verifice că $\int_1^2 f(x)\,dx = 2\ln 2+\dfrac{7}{3}$.

b) Să se arate că $\int_1^2 g(x)\,dx = 2\ln 2-\dfrac{3}{4}$.

c) Să se arate că există $x_0\in(1;2)$ astfel încât $f(x_0)>g(x_0)+3$.

Problema 47

2. Pentru oricare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=1$ şi $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$.

a) Să se determine $f_1(x)$, unde $x\in[0,\infty)$.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_1(x)\cdot\ln x\,dx=\dfrac{e^2+1}{4}$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f_2(x), x\in[0,1]$.

Problema 48

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ \dfrac{1}{x+1}-\sqrt{x}, & x\geq 0 \end{cases}$

a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-xf\left(x^2\right)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=2$.

Problema 49

2. Se consideră funcțiile $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ şi $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

b) Să se calculeze $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)\,dx=-1$.

Problema 50

2. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ şi $g(x)=x$.

a) Să se determine $\int f\left(\sqrt{x}\right)dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

c) Să se verifice că $\int_0^1 f\left(x^{50}\right)\cdot g^{99}(x)\,dx=\dfrac{e-1}{100}$.

Problema 51

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2+2x$ şi $F(x)=e^x+\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$h(x)=\dfrac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

Problema 52

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ şi $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e g(x)\,dx=1$.

b) Folosind identitatea $f(x)=g(x)-\dfrac{x}{x^2+1}$, adevărată pentru orice $x>0$, să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

c) Utilizând inegalitatea $f(x)\le\dfrac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x\in[1,e]$, să se arate că $\ln\dfrac{e^2+1}{2}\ge\dfrac{e+1}{e}$.

Problema 53

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ şi $g(x)=1+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx=\ln 2$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

c) Să se arate că există $x_0\in(0;1)$ astfel încât $f(x_0)<g(x_0)-2x_0$.

Problema 54

2. Se consideră funcțiile $f,\ g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ şi $g(x)=f''(x)$.

a) Să se calculeze $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x)\,dx$.

c) Să se determine primitiva funcției g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y=2x$.

Problema 55

2. Se consideră funcția $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

a) Să se determine funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă pentru funcția f

b) Să se demonstreze că funcția F este descrescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{1}{6}\le\int_0^1 F(x)\,dx\le\dfrac{1}{2}$.

Problema 56

2. Se consideră $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x \neq 0$, să se determine I_1.

c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Problema 57

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 (x-2) f(x) dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \left(f(t)+2\right) dt$.

Problema 58

2. a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x} dx$.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$.

c) Se consideră funcția $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și numerele reale pozitive a, b și c. Să se demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x) dx$, $\int_1^b f(x) dx$, $\int_1^c f(x) dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Problema 59

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1 \\ 3x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive.

b) Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x) dx$.

c) Să se arate că, pentru orice $m \in [-1, \infty)$ aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, ax Ox și dreptele de ecuații $x = m$ și $x = m+1$ este cel puțin $\frac{5}{4}$.

Problema 60

2. a) Să se determine primitivele funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei $g:[1,e]\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$.

c) Să se calculeze $\int_1^3 \dfrac{1}{x(x+2)}\,dx$.

Problema 61

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}+1$.

a) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)(x+2)f(x)dx=\dfrac{22}{3}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se determine numărul real pozitiv *k* astfel încât aria suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei f, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=k$ să fie egală cu $k+\ln k$.

Problema 62

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei $h:[0,2]\to\mathbb{R}$ $h(x)=f(x)$.

c) Să se arate că dacă, $a>0$, atunci $\dfrac{1}{a+2}\le\int_a^{a+1} f(x)\,dx\le\dfrac{1}{a+1}$.

Problema 63

Problema 64

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^n$, $n\in\mathbb{Z}^*$.

a) Pentru $n=2$ să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

b) Pentru $n=-1$ să se determine $a\in[0;+\infty)$ astfel încât $\int_0^a f(x)dx=0$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)f(x)\,dx$.

Problema 65

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n e^x$ şi $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 e^{-x} f_1(x)dx=\dfrac{1}{2}$.

b) Să se calculeze I_1 .

c) Să se demonstreze că $I_n+nI_{n-1}=e$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$.

Problema 66

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=e-1$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $1\le \int_0^1 f(x)\,dx\le e$.

Problema 67

2. Se consideră funcțiile $f, F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$ şi $F(x)=e^x+x-\ln x$.

a) Să se demonstreze că funcția F este o primitivă pentru funcția f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 x\left(F(x)-x+\ln x\right)\,dx$.

c) Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$ să fie egală cu e^m-2.

Problema 68

2. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \left(t^2+t+1\right)dt}{x^3+1}$.

b) Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, care verifică relația $F(1)=0$.

c) Să se determine numărul real pozitiv a ştiind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei O. a graficului funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2$ este egal cu 5π.

Problema 69

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2009}+x+1$.

a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[1,3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x^{2009}-1$.

b) Să se determine primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f, care verifică condiția $F(0)=1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{2010}}$.

Problema 70

2. Se consideră funcția $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

a) Să se verifice că $\int (x+1)(x+2)f(x)\,dx=x^2+3x+\mathcal{C}$, $x\ge 0$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-f(x+1)-\frac{1}{x+1}$.

Problema 71

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+x-2, & x<1 \\ (x+1)\ln x, & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx=-\frac{7}{6}$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h:[1;e]\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{f(x)}{x+1}$.

Problema 72

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\leq 0 \\ x+\sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^c f(x)\,dx$, unde a,b,c sunt numere reale şi funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci numerele $F(a), F(b), F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Problema 73

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e f_1\left(\sqrt{x-1}\right)dx=1$.

b) Să se determine primitiva G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1)=\frac{13}{15}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_n(x)\,dx$, unde $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

Problema 74

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+n}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x)\,dx$.

b) Pentru $n\in\mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n, axa Ox şi dreptele $x=1,\ x=2$.

c) Ştiind că F este o primitivă a funcției f_1, să se arate că funcția $G:[1,2]\to\mathbb{R},\ G(x)=F(x)-\frac{5}{6}x$ es crescătoare.

Problema 75

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx>\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$.

Problema 76

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Problema 77

2. Se consideră funcțiile $F,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\cdot e^x$ şi $f(x)=(x+1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *F*, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x)-f(x)}{e^x+1}\,dx$.

Problema 78

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ şi $g(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se determine $\int f(x)\,dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$.

Problema 79

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_1^{\frac{1}{2}}(x+1)\cdot f_2(x)\,dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx\le \ln 2$.

Problema 80

2. Se consideră funcțiile $f,F:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$ şi $F(x)=x+\frac{1}{x}$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=2$.

c) Să se calculeze $\int_1^e F(x)\cdot\ln x\,dx$.

Problema 81

2. Se consideră funcția $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=ax+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+1$ să fie o primitivă a funcției f_a

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^{\,2}(x)\,dx\geq\frac{1}{4}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Problema 82

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{x^n}$.

a) Să se determine $\int f_1(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f_1(x)\,dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f_3(x)$.

Problema 83

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Să se determine $\int f^2(x)\,dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+2}\leq\sqrt{3}$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2009}f(x)\,dx\leq\frac{\sqrt{3}}{2010}$

Problema 84

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(1;+\infty)$.

c) Să se calculeze $\int_0^e f(x)dx$.

Problema 85

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^x+e^{-x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, definită prin $h(x)=x\,f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției g.

Problema 86

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\sqrt{x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f.*

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției *f.*

c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x}\ge x,$ pentru orice $x\in[0,1],$ să se arate că $\int_0^1 f^{2009}(x)\,dx\le\frac{1}{2010}$.

Problema 87

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, unde $x>0$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R},$ definită prin $g(x)=f(x),\ x\in[1,2]$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\ln x\,dx$.

Problema 88

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{e^x}{e^{nx}+1}$.

a) Să se calculeze $\int f_0(x)\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\le\int_0^1 f_n(x)\,dx,$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Problema 89

2. Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^{1-x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f.*

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=x\cdot f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx\ge 0$.

Problema 90

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+(1-x)^n$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f_2.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f_2(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\ge\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 91

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(2-x)^n$.

a) Să se determine $\int f_1(x)\,dx$, unde $x\in[0,2]$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=f_1(x)\cdot e^x$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=2$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox*, a graficului funcției f_5.

Problema 92

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [1,4] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^n + 4x}$.

a) Să se verifice că $\int_1^4 f_1(x)\,dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

b) Să se calculeze $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)}\,dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g : [1,4] \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$.

Problema 93

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

a) Să se determine $\int f_1(x) \cdot \sqrt{x+1}\,dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f_1.

c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+1} \geq 1$, oricare ar fi $x \in [0;1]$, să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x) \leq \frac{1}{2010}$.

Problema 94

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^n + x + 2}{x+1}$.

a) Să se determine $\int x \cdot f_1(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)\,dx$.

c) Să se arate că aria suprafeței plane, cuprinse între graficul funcției f_{2008} şi axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$, este mai mică sau egală cu 2.

Problema 95

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x$ şi $g(x) = \sqrt{1-x}$.

a) Să se determine $\int f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.

c) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x) \cdot \ln x\,dx$.

Problema 96

2. Se consideră funcția $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)\,dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $h : [0,1] \to \mathbb{R},\ h(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x)$, unde $x \in [0,1]$.

Problema 97

2. Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$.

a) Să se determine $\int f'(x)\,dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

c) Să se arate că $\int_1^e e^x f(x)\,dx \le e^e - e$.

Problema 98

2. Fie funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\dfrac{2}{x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Problema 99

2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 (x+1)\cdot f(x)\,dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Folosind faptul că $1\le(x+1)^2\le 4$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f, este un număr din intervalul $\left[\dfrac{\pi}{28},\dfrac{\pi}{7}\right]$.

Problema 100

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\left(x^{n+1}+1\right)\cdot e^x$.

a) Să se determine $\int f_0(x)\cdot e^{-x}\,dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x)\,dx+\int_0^1 f_{2010}(x)\,dx\ge 2\int_0^1 f_{2009}(x)\,dx$.

SUCCES!