SUBIECTE STRUCTURATE TIP BAC

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Analiză matematică, clasa a XI-a

100 probleme de analiză matematică tip BAC - clasa a XI-a

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Problema 1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcției *f*.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

c) Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

Problema 2

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+...+g(2009)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)-f''(x)$.

Problema 3

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}\le 5^{\sqrt{3}}$.

Problema 4

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că *f* este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

Problema 5

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2009}-2009(x-1)-1$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0;1)$.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $[0;+\infty)$.

Problema 6

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

Problema 7

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(ax^2+bx+c)$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1, b=c=0$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(0)-f(0)=b$.

c) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şi $f''(0)=4$.

Problema 8

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in(0;+\infty)\setminus\{e\}$.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

Problema 9

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

Problema 10

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\geq 1\\ -x^2+x, & x<1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.

c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe $(-\infty;1)$.

Problema 11

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 f'(x)$.

Problema 12

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0\\ x^2+x+a, & x\geq 0\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=0$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1;\dfrac{1}{e}-1\right)$.

c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0;+\infty)$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

Problema 13

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x>-1$.

Problema 14

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(e)$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f.

c) Să se demonstreze că $x^e \le e^x$, pentru orice $x>0$.

Problema 15

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0,+\infty)$.

b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se arate că $f(x)\ge \ln\frac{e^2}{4}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

Problema 16

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\ge 8$, oricare ar fi $x>1$.

Problema 17

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

Problema 18

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$.

a) Să se verifice că $f'(x)=4x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Problema 19

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{1}{2e}$, pentru orice $x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

Problema 20

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in[0,1]$.

b) Să se arate că *f* este funcție crescătoare pe $[0;1]$.

c) Să se demonstreze că $\dfrac{3}{e}\le\dfrac{1}{f(x)}\le 2,$ pentru orice $x\in[0,1]$.

Problema 21

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției *f*.

Problema 22

1. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=e^{-x}-1$ și $f_{n+1}(x)=f_n'(x),$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Să determine $f_1(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcției f_0.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_2(x)+x-1}{x^2}$.

Problema 23

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se demonstreze că funcția *f* este descrescătoare pe $(0,2]$.

c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}}\le 3e^{\sqrt{2}}$.

Problema 24

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine punctul de extrem al funcției *f*.

c) Să se demonstreze că $\ln\sqrt{x}\le\dfrac{x^2-1}{4}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

Problema 25

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $f(x)\ge 1,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției *f*.

Problema 26

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x-1$.

a) Să se calculeze derivata funcției f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se arate că $e^{x^2}+e^x\ge x^2+x+2,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Problema 27

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0;+\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f.

Problema 28

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția f este concavă pe $(1,+\infty)$.

Problema 29

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

a) Să se arate că $f(1)-f'(1)=1$.

b) Să se determine punctul de extrem al funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{x}$

Problema 30

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$.

Problema 31

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

a) Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\ge-\dfrac{1}{2e}$, pentru orice $x>0$.

Problema 32

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}$.

c) Să se arate că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.

Problema 33

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+2x+3)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Problema 34

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2e^x}{x+e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $-1\le f(x)\le\frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

Problema 35

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}-3x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}-6}{2}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să e demonstreze că $-4\le f(x)+f\left(x^2\right)\le 0$, pentru orice $x\in(0;1]$.

Problema 36

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-3x-3\right)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că tangenta la graficul funcției f, dusă în punctul de coordonate $(-2,f(-2))$, este paralelă cu axa Ox.

Problema 37

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-\ln x}{x+\ln x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Să se arate că $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}$.

Problema 38

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x}$.

Problema 39

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2010}+2010^x$.

a) Să se determine $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$.

Problema 40

1. Fie funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in(1;+\infty)$

b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

Problema 41

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Ştiind că $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}.$$

Problema 42

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$.

a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0;+\infty)$.

b) Să se determine punctul de extrem al funcției f.

c) Să se arate că $2-e\le f(2)\le 0$.

Problema 43

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

b) Să se arate că $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ avem $\dfrac{2}{3}\le f\left(x^4\right)+f\left(x^2\right)\le 2$.

Problema 44

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

a) Să se verifice că $f'(0)=1$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{e^x}$.

Problema 45

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$ şi $g(x)=xe^x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g.

c) Dacă $I\subset\mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcția f este convexă pe I.

Problema 46

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x\in(0;1) \\ 1+\ln x, & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) Să se arate că $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$, pentru orice $x>0$.

Problema 47

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in[1;+\infty)$.

b) Să se demonstreze că $\ln\dfrac{2010}{2009}\leq\dfrac{1}{2}$.

c) Folosind faptul că $1\leq x\leq x^2\leq 2$, oricare ar fi $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2-x\leq 2\ln x$, pentru orice $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

Problema 48

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x+3\ ,\ x\leq 1 \\ \ln x\ ,\ x>1 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) Să se determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(e^x\right)+f\left(e^{x^2}\right)+\ldots+f\left(e^{x^{2009}}\right)}{x^{2009}}$.

Problema 49

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

Problema 50

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax-6\ ,\ x<4 \\ \sqrt{x}\ ,\ x\geq 4 \end{cases}$, unde a este parametru real.

a) Să se determine valoarea reală a lui a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=4$.

b) Să se calculeze $f'(9)$.

c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.

Problema 51

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x}, & x\geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Problema 52

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\geq f(x)$, oricare ar fi $x\in(1;+\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\,f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Problema 53

1. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$.

c) Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^2-1\right)\ln x$. Să se demonstreze că $g(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0;+\infty)$.

Problema 54

1. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ și $g(x)=\frac{x-1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0$.

b) Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcției *f*.

c) Să se demonstreze că $g(x)-f(x)\leq 1+\frac{1}{e^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Problema 55

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\leq 1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$.

a) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot x\right)$.

Problema 56

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f''(x)}$.

c) Să se arate că $e^{\sqrt{2009}}+\sqrt{2010}\leq e^{\sqrt{2010}}+\sqrt{2009}$.

Problema 57

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ex-1$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ și dreapta de ecuație $x=1$.

Problema 58

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $\sqrt{x}\geq 1+\ln\sqrt{x}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

Problema 59

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

c) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f.

Problema 60

1. a) Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1\ , & x<1\\ 2x-1\ , & x\geq 1\end{cases}$ în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze derivata funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^3-15x^2+24x-1$.

c) Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

Problema 61

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-x\ln 2$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

c) Să se determine punctul de extrem al funcției f.

Problema 62

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

Problema 63

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in[1,+\infty)$.

b) Să se studieze monotonia funcției f pe $[1,+\infty)$.

c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

Problema 64

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(x)+f\left(x^3\right)\geq -2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Problema 65

1. Se consideră funcțiile $f,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $h(x)=f^2(x)$.

a) Să se verifice că $h'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0;+\infty)$.

Problema 66

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+2}, & x\geq 0\\ x+\dfrac{3}{2}, & x<0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2}, 2\right)$, oricare ar fi $x\in[0;+\infty)$.

Problema 67

1. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+4$ şi $g(x)=x^3-5x^2+8x-4$.

a) Să se calculeze $f'(x)-g'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

Problema 68

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

Problema 69

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcției f.

Problema 70

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se determine coordonatele punctului graficului funcției f, în care tangenta la grafic are panta egală cu $\dfrac{3}{2}$.

Problema 71

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \ln x$ şi $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

a) Să se determine funcția f_1.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_2.

c) Să se arate că $f_0(x) \le \dfrac{1}{f_1(x)} - 1$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

Problema 72

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

Problema 73

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x^2+1}, & x \le 1 \\ \dfrac{2x+a}{x^2+2}, & x > 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficului funcției f.

c) Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $(2; f(2))$ să fie egală cu 1.

Problema 74

1. Se consideră funcțiile $f, h : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ şi $h(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

a) Să se arate că $h(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

b) Să se demonstreze că funcția h este descrescătoare pe $(-\infty; 1)$.

c) Să se arate că $(f'(x))^2 \ge f(x) \cdot f''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Problema 75

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & x \le 0 \\ -2x+1, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

b) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Problema 76

1. Se consideră funcția $f : (0, +\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.

b) Să se arate că $2009\sqrt{2011} \le 2010\sqrt{2010}$.

c) Să se arate că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

Problema 77

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

Problema 78

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2x+1\right)\cdot e^x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=(x+1)(x+3)\cdot e^x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(-2)+f(-4)\le\dfrac{8}{e^3}$.

Problema 79

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+3^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

Problema 80

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\ge 4$, pentru orice $x\in(1;+\infty)$.

Problema 81

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;-1)$.

c) Să se arate că $f(x)\ge -1$, pentru orice $x>0$.

Problema 82

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;-2)$.

c) Să se demonstreze că $x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ge 3$ pentru orice $x>0$.

Problema 83

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Problema 84

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

Problema 85

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0,+\infty)$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

c) Să se arate că $f(x)\geq 0,$ oricare ar fi $x>0$.

Problema 86

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2},$ pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

c) Să se arate că $\ln x\leq\dfrac{x}{e},$ pentru orice $x>0$.

Problema 87

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2},$ pentru orice $x>0$.

b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că $e^x\geq ex,$ pentru orice $x>0$.

Problema 88

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\leq 3$, pentru orice $x\leq 2$.

Problema 89

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine intervalele de concavitate şi intervalele de convexitate ale funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq -\dfrac{1}{2}$.

Problema 90

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;2)$.

c) Să se arate că $2\sqrt{x}\geq 2+\ln x$, pentru orice $x>0$.

Problema 91

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2008}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2009}\right)$.

Problema 92

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\ge\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\le 2$.

Problema 93

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2}\right)\ge f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

Problema 94

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2009}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2010}\right)$.

Problema 95

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

c) Să se arate că $\dfrac{x+2}{3}\ge\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x>0$.

Problema 96

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(2008)\ge f(2009)$.

Problema 97

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi intervalele de concavitate ale funcției f.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.

Problema 98

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(2;e^2\right)$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq e^2$, pentru orice $x>1$.

Problema 99

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x-1$.

a) Să se verifice că $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $O(0;0)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

Problema 100

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

SUCCES!