SUBIECTE STRUCTURATE TIP BAC

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Algebră, clasa a XII-a

Legi de compoziție ……………… pag. 1
Clase de resturi …………………. pag. 9
Polinoame cu coeficienți reali ….. pag. 11

LEGI DE COMPOZIȚIE

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Problema 1

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este număr real.

c) Știind că operația „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ \cdots \circ 2008 \circ 2009$.

Problema 2

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se arate că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 11$.

c) Știind că operația ”$\circ$” este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2009}$.

Problema 3

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2009$.

Problema 4

2. Se consideră mulțimea $M = [k; +\infty) \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ şi operația $x * y = xy - k(x+y) + k^2 + k$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $2 * 3 = 2$.

b) Pentru $k = 2$ să se rezolve în M ecuația $x * x = 6$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x * y \in M$.

Problema 5

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$.

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

c) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

Problema 6

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$.

a) Să se demonstreze că $x \circ (-x) = -1$, oricare ar fi x real.

b) Să se arate că legea de compoziție “$\circ$”este asociativă.

c) Să se calculeze $(-4) \circ (-3) \circ \ldots \circ 3 \circ 4$.

Problema 7

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a) Să se demonstreze că $x * y = 3(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numerele reale pentru care $(x^2 - 2) * 5 = -1$.

c) Știind că legea de compoziție este asociativă, să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \ldots * (-1) * 0 * 1 * \ldots * 2008 * 2009$.

Problema 8

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, oricare ar fi numerele reale a şi b.

b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe M.

c) Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M.

Problema 9

2. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x \circ x = x * x$.

b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 10

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2)+2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei

$E = (-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2008 \circ 2009$.

Problema 11

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = xy - 5(x+y) + 30$.

a) Să se demonstreze că $x * y = (x-5)(y-5)+5$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$*$” este asociativă, să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = x$.

Problema 12

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $x * x = x$, unde $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

Problema 13

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + m$, unde m este număr real.

a) Să se arate că legea de compoziţie "$*$" este asociativă.

b) Să se determine m astfel încât $e = -6$ să fie elementul neutru al legii "$*$".

c) Să se determine m astfel încât $\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*m*\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$.

Problema 14

2. Pe mulţimea numerelor reale, se consideră legea de compoziţie definită prin $x \circ y = xy - x - y + 2$.

a) Să se arate că legea “$\circ$” este asociativă.

b) Să se arate că, pentru oricare $x, y \in (1, +\infty)$, rezultă că $x \circ y \in (1, +\infty)$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x \circ a = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

Problema 15

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = 2xy - x - y + 1$.

a) Să se arate că $x * y = xy + (1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * (1-x) = 0$.

Problema 16

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * 4 = 10$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * a = a * x = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea „$*$” este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009} * \frac{2}{2009} * \ldots * \frac{4018}{2009}$.

Problema 17

2. Se consideră mulţimea $G = \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice că $3 + 2\sqrt{2} \in G$.

b) Să se demonstreze că $x \cdot y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

c) Să se arate că orice element din mulţimea G are invers în G în raport cu înmulţirea numerelor reale.

Problema 18

2. Se consideră mulțimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

b) Știind că mulțimea G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

c) Să se arate că funcția $f:\mathbb{Z}\to G$, $f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ și $(G,\cdot)$.

Problema 19

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x\perp y=x+y+1$, $x\circ y=ax+by-1$, cu $a,b\in\mathbb{Z}$ și funcția $f(x)=x+2$. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$,

a) Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

c) Dacă $a=b=1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ și $(\mathbb{Z},\circ)$.

Problema 20

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2^{x+y}$.

a) Să se calculeze $2009\circ(-2009)$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x^2=64$.

c) Să se demonstreze că, dacă $(x\circ y)\circ z=2^{z+1}$, atunci $x=-y$.

Problema 21

2. Pe mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operația $x\circ y=x^{3\ln y}$.

a) Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x\circ e=8$, unde e este baza logaritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că operația „$\circ$” este asociativă pe mulțimea G.

Problema 22

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

a) Să se calculeze $x*0$.

b) Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

c) Știind că $x_0\in\mathbb{Q}$ și $x_n=x_0*x_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $x_3\notin\mathbb{Q}$.

Problema 23

2. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se consideră operația $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, $\forall x,y\in G$.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că toate elementele mulțimii G sunt simetrizabile, în raport cu legea "$\circ$".

Problema 24

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x*5^x=11$.

c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$*$".

Problema 25

2. Se consideră mulțimea $G=(-1,1)$ și legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se rezolve în G ecuația $x*x=\dfrac{4}{5}$.

b) Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

Problema 26

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 1$.

a) Să se calculeze $2008 \circ 2009$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x^2 \le 3$.

c) Fie mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; n \ge 2 \text{ şi } C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n + 6 \right\}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

Problema 27

2. Fie mulțimea $G = \left\{ a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice dacă 0 şi 1 aparțin mulțimii G.

b) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in G$ avem $x \cdot y \in G$.

c) Să se arate că dacă $x \in G$, atunci $\frac{1}{x} \in G$.

Problema 28

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$”.

c) Să se determine $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ astfel încât $C_n^2 \circ C_n^2 = 13$.

Problema 29

2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = 12$.

b) Să se arate că $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} (x-3) * y = 2 \\ (x-y) \circ 4 = 10 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 30

2. Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x \circ y = x + y + 11$.

a) Să se arate că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{de\ 6\ ori\ x} = 1$.

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}, \circ)$ este grup comutativ.

Problema 31

2. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

a) Să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{2}$.

b) Fie funcția $f : (-1, 1) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$. Să se verifice că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru oricare $x, y \in G$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

Problema 32

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = xy + 3x + ay + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$” să fie comutativă.

b) Să se arate că pentru $a = 3$ şi $b = 6$ legea „$*$” admite element neutru.

c) Să se determine a şi b astfel încât $(-3) * x = -3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Problema 33

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \perp y = (x-3)(y-3) + 3$.

a) Să se arate că $(x+3) \perp \left(\frac{1}{x} + 3 \right) = 4$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se arate că legea „$\perp$” are elementul neutru $e = 4$.

c) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\perp$”.

Problema 34

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = x + y + 3,\ x \circ y = ax + y - 3$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x + 6$.

a) Să se calculeze $(1 * 2) * (0 \circ 3)$.

b) Să se determine numărul întreg a pentru care legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

c) Pentru $a = 1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ şi $(\mathbb{Z}, \circ)$.

Problema 35

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z,$ oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ (-4) \circ y = -4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $1 \circ (-2) \circ 3 \circ (-4) \circ 5 \circ (-6)$.

Problema 36

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ şi $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.

a) Să se verifice că $(x * 2) - (3 \circ x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Știind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$*$” şi e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$\circ$”, să se calculeze $(e_1 * e_2) + (e_1 \circ e_2)$.

c) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 37

2. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{R}$ şi mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$

c) Să se arate că $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor .

Problema 38

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y - 14$.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 2$.

b) Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă.

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup comutativ.

Problema 39

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy - 10(x + y) + 110$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x - 10)(y - 10) + 10$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $C_{10}^1 \circ C_{20}^1$.

c) Să se rezolve ecuația $x \circ (x - 1) = 10$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Problema 40

2. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră operația $x \circ y = x^{2 \ln y}$.

a) Să se calculeze $3 \circ e$, unde e este baza logaritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x \circ y \in G$, pentru orice $x, y \in G$.

c) Să se arate că operația "$\circ$" este asociativă pe mulțimea G.

Problema 41

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy + 7(x + y) + 42$.

a) Să se calculeze $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$.

b) Să se verifice că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

Problema 42

2. Se consideră mulțimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$.

c) Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{Z}\to G$, $f(x)=A_x$ este morfism de grupuri.

Problema 43

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x\circ y=x+y+3$ și $x*y=xy-3(x+y)+12$.

a) Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}x\circ(y-1)=0\\(x+1)*y=x*(y+1)\end{cases}$, cu $x,y\in\mathbb{R}$.

Problema 44

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-x-y+2$.

a) Să se demonstreze că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

c) Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*\ldots*\frac{\sqrt{2009}}{2}$.

Problema 45

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$.

a) Să se arate că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x*x=x$.

c) Să se calculeze $1*2*3*\ldots*2009$.

Problema 46

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{2009}(x+y)+2009+\sqrt{2009}$.

a) Să se arate că $x*y=\left(x-\sqrt{2009}\right)\left(y-\sqrt{2009}\right)+\sqrt{2009}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

c) Știind că legea de compoziție „$*$” este asociativă, să se calculeze $\left(-\sqrt{2009}\right)*\left(-\sqrt{2008}\right)*\ldots*0*\ldots*\left(\sqrt{2008}\right)*\left(\sqrt{2009}\right)$.

Problema 47

2. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x*y=px+y+2$, cu $p\in\mathbb{Z}$, $x\circ y=x+y-2$ și funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=3x+q$, cu $q\in\mathbb{Z}$.

a) Să se determine numărul real p astfel încât legea de compoziție "$*$" să fie comutativă.

b) Pentru $p=1$ să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x*x)\circ(x*x)=x^2+2$.

c) Pentru $p=1$ să se determine numărul întreg q astfel încât funcția f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ și $(\mathbb{Z},\circ)$.

Problema 48

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

a) Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real x pentru care $\left(x^2-5\right)\circ 6=-1$.

c) Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

Problema 49

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.

a) Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=36$.

c) Știind că operația „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

Problema 50

2. Pe mulțimea mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ și $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se demonstreze că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

b) Să se determine simetricul elementului $x = -3$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

Problema 51

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 7x + 7y + 14$.

a) Să se determine elementul neutru al legii "$*$".

b) Să se rezolve mulțimea numerelor întregi inecuația $x * x \le -1$.

c) Să se demonstreze că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

SUCCES!

CLASE DE RESTURI

Problema 1

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\ \hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4},\ \hat{5}\}$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x+y=\hat{4} \\ x+\hat{2}y=\hat{5} \end{cases}$.

Problema 2

2. Fie polinoamele $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$ și $g=X+\hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

c) Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

Problema 3

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=(\hat{3}a+\hat{3}b)X^2+\hat{2}X+\hat{2}a+\hat{3}b$ și $g=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}a+\hat{2}b$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_5$, astfel încât cele două polinoame să fie egale.

b) Pentru $a=b=\hat{2}$, să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$.

c) Pentru $a=b=\hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

Problema 4

2. Se consideră polinoamele $f=\hat{3}X^5+\hat{3}X^3+\hat{3}X+\hat{4}\in\mathbb{Z}_5[X]$ și $g=\hat{3}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

b) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

c) Să se determine câtul împărțirii polinomului f la polinomul g.

Problema 5

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_2[X]$, $f=X^2+\hat{1}$ și $g=X+\hat{1}$ și mulțimea

$H=\{a+bX+cX^2 \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\}$.

a) Să se verifice că $g^2=f$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f+g$ la polinomul f.

c) Să se determine numărul elementelor mulțimii H.

Problema 6

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

a) Pentru $g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $g=(X+\hat{2})^2(X+\hat{1})$, să se calculeze $g(\hat{0})$.

b) Dacă $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X$, să se arate că $f(x)=\hat{0}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

c) Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 și pentru care $h(\hat{0})=h(\hat{1})=h(\hat{2})=\hat{0}$.

Problema 7

2. Se consideră mulțimea $M=\{f\in\mathbb{Z}_3[X] \mid f=X^2+aX+b\}$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1})$ pentru $a=b=\hat{1}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$ pentru care $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{1}$.

c) Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

Problema 8

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{3}X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{2}$ şi $g=X^2+\hat{2}X$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1})\cdot g(\hat{0})$.

b) Să se verifice că $f=(\hat{3}X+\hat{3})\cdot g+\hat{2}X+\hat{2}$.

c) Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

Problema 9

2. Se consideră $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

a) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$.

b) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

Problema 10

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

a) Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulţirea din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

b) Se consideră S suma soluţiilor ecuaţiei $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{5}$ şi P produsul soluţiilor ecuaţiei $x^2=x$, unde $x\in\mathbb{Z}_6$. Să se calculeze $S+P$.

c) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^3=\hat{0}$.

Problema 11

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_6[X]$, $f=X^3+(\hat{2}a+\hat{1})X+a+\hat{4}$

a) Să se demonstreze că $b^3=b$, oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}_6$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_6$, ştiind că $f(\hat{2})=\hat{0}$.

c) Pentru $a=\hat{2}$ să se rezolve ecuaţia $f(x)=\hat{0}$, $x\in\mathbb{Z}_6$.

Problema 12

2. Se consideră mulţimea $M=\{f\in\mathbb{Z}_3[X] \mid f=X^2+aX+b\}$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1})$ pentru $a=b=\hat{1}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$ pentru care $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{1}$.

c) Să se determine numărul elementelor mulţimii M.

SUCCES!

POLINOAME CU COEFICIENȚI REALI

Problema 1

2. Se consideră polinoamele $f = X^2 - 12X + 35$ și $g = (X-6)^{2009} + X - 6$. Polinomul g are forma algebrică $g = a_{2009}X^{2009} + a_{2008}X^{2008} + ... + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, ..., a_{2009} \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(5) + g(5)$.

b) Să se arate că numărul $a_0 + a_1 + ... + a_{2009}$ este negativ.

c) Să se determine restul împărțirii polinomului g la polinomul f.

Problema 2

2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$ și suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = -2$.

b) Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

c) Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.

Problema 3

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = c = 1$ și $b = -1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$.

b) Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$ este X, iar restul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este -1.

c) Să se demonstreze că dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

Problema 4

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, știind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.

c) Pentru $m = 1$ și $n = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Problema 5

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ și $g = X^3 + X - 2$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = -3$ și $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.

Problema 6

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x) = 0$.

Problema 7

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^2 - X - 1$.

a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

b) Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $y^3 = 2y + 1$.

c) Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

Problema 8

2. Se consideră polinomul $f = (X+1)^{2008} + (X-1)^{2008}$ având forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + ... + a_1X + a_0$, unde $a_0, a_1, ..., a_{2008}$ sunt numere reale.

a) Să se calculeze $f(-1) + f(1)$.

b) Să se determine suma coeficienților polinomului f.

c) Să se determine restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.

Problema 9

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+1)X^2 - 3X + 3$, $f \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

b) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.

c) Pentru $m = 0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

Problema 10

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a = -1$, $b = -2$ şi $c = 0$.

c) Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

Problema 11

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real c ştiind că $f(1) + f(-1) = 2009$.

b) Să se determine numerele reale a, b, c ştiind că $f(0) = f(1) = -2$ şi că una dintre rădăcinile polinomului este $x = 2$.

c) Pentru $a = -2$, $b = 1$ şi $c = -2$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

Problema 12

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.

a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

Problema 13

2. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f\left(\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}$.

c) Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

Problema 14

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + (a+3)X^2 + 6X - 4$ care are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X - \sqrt{2}$.

c) Pentru $a = -3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Problema 15

2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul f are o rădăcină raţională pozitivă.

Problema 16

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine a ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Problema 17

2. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + \left(m^2 + 7\right)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ ştiind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

c) Pentru $m = -5$ să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x) = 0$.

Problema 18

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ și $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f și h să fie egale.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.

Problema 19

2. Se consideră ecuația $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.

b) Pentru $a = 1$, să se determine soluțiile reale ale ecuației.

c) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

Problema 20

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

a) Să se arate că $f = \left(X^2 - 6\right)^2 - 1$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Problema 21

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$.

a) Să se determine numărul real a astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.

b) Pentru $a = 4$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 4$.

c) Să se demonstreze că, dacă $a \in (2, +\infty)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

Problema 22

2. Se consideră polinomul $f = \left(X^2 - 2X + 1\right)^2 - a^2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Știind că $a = 0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

b) Să se verifice că $f = \left(X^2 - 2X + 1 + a\right)\left(X^2 - 2X + 1 - a\right)$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

Problema 23

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f știind că $a = -1$, $b = -2$ și $c = 0$.

c) Știind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

Problema 24

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și $p \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(-p)$.

b) Să se determine $p \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.

c) Să se calculeze în funcție de $p \in \mathbb{R}$ suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Problema 25

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$.

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g.

c) Să se calculeze $f(a)$, știind că a este o rădăcină a polinomului g.

Problema 26

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, $m \in \mathbb{R}$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

Se definește $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine numărul real m astfel încât $x_1 = 2$.

b) Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

c) Să se arate că pentru orice număr par $m \in \mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raționale.

Problema 27

2. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că:

$x_1+x_2+x_3=2; \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}; x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$.

a) Să se calculeze $x_1x_2x_3$.

b) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$, știind că ecuația $x^3+ax^2+bx+c=0$ are soluțiile x_1,x_2,x_3.

c) Să se descompună polinomul $f=X^3-2X^2-2X+4$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$.

Problema 28

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-3X+a$ și $g(x)=X^2-3X+2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=2$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=g(x)$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului *f*, știind că are o rădăcină dublă pozitivă.

c) Pentru $a=2$ să se rezolve ecuația $e^{f(x)}=g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Problema 29

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-pX^2+qX-r$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $f(0)-f(1)$.

b) Să se calculeze expresia $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ în funcție de p,q,r.

c) Să se arate că polinomul $g=X^3+X^2+X-1$ nu are toate rădăcinile reale.

Problema 30

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+3X^2+3X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ și

$g=X^2-2X+1$, cu rădăcinile $y_1,y_2\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze diferența $S-S'$, unde $S=x_1+x_2+x_3$ și $S'=y_1+y_2$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g.

c) Să se calculeze produsul $f(y_1)\cdot f(y_2)$.

Problema 31

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g=X^2-1$.

b) Să se calculeze produsul $S\cdot P$ unde $S=x_1+x_2+x_3+x_4$ și $P=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

c) Să se calculeze suma $T=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

Problema 32

2. În mulțimea polinoamelor $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f=X^3+mX^2+nX+6$ și

$g(X)=X^2-X-2$.

a) Să se rezolve ecuația $x^2-x-2=0$.

b) Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

c) Pentru $m=-4$ și $n=1$ să se calculeze produsul $P=f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2007)\cdot f(2008)$.

Problema 33

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=(X+1)^{2009}-(X-1)^{2009}$ care are forma algebrică

$f=a_{2009}X^{2009}+a_{2008}X^{2008}+\ldots+a_1X+a_0$.

a) Să se determine a_0.

b) Să se arate că $f(1)+f(-1)$ este număr întreg par.

c) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului f.

Problema 34

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $c=501$ să se demonstreze că $f(1)+f(-1)=1004$.

b) Pentru $a=-2$, $b=2$ și $c=-1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a, b, c astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $g=X^3-X$.

Problema 35

2. În inelul $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = x^3 - x - 5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care restul împărțirii polinomului f la $X - a$ este -5.

c) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

Problema 36

2. Se consideră polinomul $f = \left(1 + X + X^3\right)^{670} - X^{2010} \in \mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică

$f = a_{2009}X^{2009} + \ldots + a_1X + a_0$.

a) Să se calculeze $f(1) + f(-1)$.

b) Să se arate că suma $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$ este un număr par.

c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

Problema 37

2. Se consideră polinomul $f = \left(1 + X + X^2\right)^{1004} + X^{2009}$, cu forma algebrică

$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{2009}X^{2009}$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se arate că $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$ este un număr întreg par.

c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 - 1$.

SUCCES!