SUBIECTE STRUCTURATE TIP BAC

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Algebră, clasa a XI-a

Selecție realizată de Silviu Boga, profesor, Iași

DETERMINANȚI

DETERMINANȚI POLINOMIALI

Problema 1

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$.

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

Problema 2

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 2$, $b = 1$ şi $c = -1$, să se calculeze determinantul d.

b) Să se verifice că $d = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0$.

Problema 3

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 2x = 0$.

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Să se calculeze ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$.

c) Să se calculeze determinantul d.

Problema 4

1. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Ştiind că $a = -1$, $b = 0$ şi $c = 1$, să se calculeze determinantul Δ.

b) Să se arate că $\Delta = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Problema 5

1. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, unde a este număr real.

a) Să se calculeze determinantul $D(9)$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a) = 0$.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D\left(3^x\right) = 0$.

Problema 6

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

b) Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=-4$.

Problema 7

1. Se consideră determinantul $D(a;b;x)=\begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 1 & a & bx \\ 1 & b & ax \end{vmatrix}$, unde a,b și x sunt numere reale.

a) Să se calculeze $D(1;1;0)$.

b) Să se demonstreze că $D(a;b;x)$ nu depinde de numărul real x.

c) Să se rezolve ecuația $D(a;b;x)=0$, unde a și b sunt numere reale pozitive.

APLICAȚII ALE DETERMINANȚILOR ÎN GEOMETRIE

Problema 8

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

b) Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

c) Să se arate că toate punctele $A_n(n,2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$ sunt coliniare.

Problema 9

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n+2,3n-2)$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele A_1 și A_2.

b) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, punctele A_1, A_2 și A_n sunt coliniare.

Problema 10

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4)$, $B(a,a)$ și $C(3,-2)$ unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=0$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Pentru $a=-2$ să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B și C.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât punctele B, C şi $M(x,-2)$ sunt coliniare, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Problema 11

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,2^n)$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbb{N}$.

Problema 12

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n,2n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B_1 și B_2.

b) Să se arate că $A_n=B_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2.

Problema 13

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,n+2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

b) Să se demonstreze că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

c) Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n.

Problema 14

1. Se consideră punctele $A_n\left(n,n^2\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

b) Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.

c) Să se arate că pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este un număr natural.

Problema 15

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1),B(1,2)$ şi $C_n\left(n,-n\right)$, cu $n\in\mathbb{Z}$.

a) Să se scrie ecuația dreptei C_4C_2.

b) Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}^*$ punctele O,C_n,C_{n+1}, sunt coliniare.

c) Să se calculeze aria triunghiului ABC_3.

Problema 16

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $AB: x+2y-4=0$ şi $BC: 3x+y-2=0$.

a) Să se determine coordonatele punctului B.

b) Pentru $A(4,0),B(0,2),C(1,-1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.

c) Pentru $A(4,0),B(0,2),C(1,-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

APLICAȚII ALE DETERMINANȚILOR LA REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE

Problema 17

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ şi matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $\det(A(4))$.

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

c) Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ să se rezolve sistemul.

Problema 18

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Să se arate că pentru orice m număr real tripletul $(0;3;1)$ este soluție a sistemului.

b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.

c) Pentru $m\neq 3$ să se rezolve sistemul.

Problema 19

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1 \\ 2x-z=a \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{Z}$. Se notează cu A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.

Problema 20

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

b) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

Problema 21

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y+mz=0 \\ 4x+y+5z=0 \end{cases}$, cu m parametru real şi A matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei A pentru $m=1$.

b) Să se determine parametrul real m ştiind că determinantul matricei sistemului este nul.

c) Pentru $m \neq -1$ să se rezolve sistemul.

Problema 22

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$, sunt distincte două câte două.

a) Să se rezolve sistemul pentru $a=0$, $b=1$ şi $c=2$.

b) Să se verifice că det $(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

c) Să se demonstreze că soluţia sistemului nu depinde de numerele reale a, b şi c.

Problema 23

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât soluţia sistemului să verifice relaţia $x=y+z$.

Problema 24

Problema 25

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde $a,b \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Pentru $a=-1$ şi $b=2$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine numărul real b, ştiind că (x_0, y_0, z_0) este soluţie a sistemului şi că $x_0+y_0+z_0=4$.

Problema 26

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22 \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Să se arate că tripletul $(7,1,1)$ nu poate fi soluţie a sistemului, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0+z_0=3$.

Problema 27

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $(2,1,-1)$ să fie o soluţie sistemului.

b) Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2-3m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $m=-5$ să se rezolve sistemul de ecuaţii.

Problema 28

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $\det(A)=a^2-6a+5$.

b) Să se rezolve ecuația $\det(A)=0$.

c) Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

Problema 29

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+ay+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$, unde a este număr real şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Pentru $a=0$ să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se determine valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

c) Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

Problema 30

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det(A)\neq 0$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$.

SUCCES!

MATRICE

PROBLEME CU MATRICE DE ORDIN DOI

Problema 1

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^3, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

b) Să se verifice dacă $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze suma $X(1)+X(2)+X(3)+...+X(2009)$.

Problema 2

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}x-3&1\\1&x-3\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se determine x real, ştiind că $\det(A)=0$.

b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-\left(x^2-6x+8\right)\cdot I_2$.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

Problema 3

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2=B\cdot B$.

b) Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}$.

c) Să se arate că $C^4=6^4\cdot I_2$, unde $C=B^2+A^{-1}$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

Problema 4

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{de\ n\ ori}$.

a) Să se calculeze A^2+A.

b) Ştiind că $A^n=\begin{pmatrix}5^n&0\\0&1\end{pmatrix}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se rezolve ecuația $\det\left(A^n\right)=2\cdot 5^n-125$.

c) Să se determine transpusa matricei $B=A+A^2+...+A^{2009}$.

Problema 5

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel încât $A+2I_2=O_2$.

b) Să se calculeze determinantul matricei $B=A-A^t$.

c) Să se arate că, dacă $A+A^t=2I_2$, atunci determinantul matricei $A-A^t$ este un număr divizibil cu 4.

Problema 6

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se demonstreze că $A^3=7A$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

c) Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-6I_2$ şi $A^2=A\cdot A$.

Problema 7

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

b) Ştiind că $A, B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

c) Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\geq 0$, oricare ar fi $A, B\in\mathcal{M}$.

Problema 8

1. Se consideră matricele $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{pmatrix}$ cu $v, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că dacă $X \cdot V = U$, atunci $x \cdot (v^2 - 9) = 0$.

b) Să se determine valorile reale ale numărului v pentru care determinantul matricei V este nenul.

c) Să se determine trei soluţii distincte ale sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 9x + 3y = 0 \end{cases}$.

Problema 9

1. Se consideră mulţimea $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z},\; a^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice dacă matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi respectiv $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparţin mulţimii G.

b) Să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = aI_2 + bB$, oricare $a, b \in \mathbb{Z}$.

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G.

Problema 10

1. Se consideră mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z},\; a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$.

b) Să se arate că pentru orice două matrice $A, B \in G$ are loc egalitatea $A \cdot B = B \cdot A$.

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparţine mulţimii G.

Problema 11

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$.

c) Ştiind că $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $AX = XA$, să se arate că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = mI_2 + nA$.

Problema 12

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se verifice că $AB - 2B = O_2$.

c) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A \cdot X \cdot B = O_2$, atunci suma elementelor matricei X este egală cu zero.

Problema 13

1. Se consideră mulţimea $M = \left\{ aI_2 + bV \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $I_2 \in M$.

b) Să se arate că dacă $A \in M$ şi A este matrice inversabilă, atunci $a \neq 0$.

c) Ştiind că $A, B \in M$, să se arate că $AB \in M$.

Problema 14

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că $A^2 = (a+d)A - (ad - bc)I_2$.

c) Ştiind că $a + d \neq 0$ şi $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2M = MA^2$, să se demonstreze că $AM = MA$.

Problema 15

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $I_2+(I_2)^t$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $m\in\mathbb{R}$ are loc relaţia $(mA)^t=mA^t$.

c) Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A+A^t=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Problema 16

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=I_2+A$. Se notează

$X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$.

a) Să se verifice că $A^2=0_2$.

b) Să se calculeze inversa matricei B.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $B^3-B^2=xA$.

Problema 17

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid XA=AX\}$.

a) Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2$.

b) Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-2I_2$ şi $A^2=A\cdot A$.

c) Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$.

Problema 18

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

b) Ştiind că $A,B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

c) Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\le 0$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}$.

Problema 19

1. În mulţimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $A+A^2=2A$.

b) Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X+A)=2$.

c) Ştiind că $A^n=A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A+2A^2+\ldots+nA^n=\frac{n(n+1)}{2}A,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 20

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că $A^2=3A$.

b) Să se calculeze $\det(A^{10})$.

c) Să se determine inversa matricei $B=A+I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Problema 21

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $AB=BA$.

b) Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$ şi $B^2=B\cdot B$.

c) Să se arate că $C^4=5^4\cdot I_2$, unde $C=A+B$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

Problema 22

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a-b\end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1,1)$.

b) Să se demonstreze că dacă $A,B\in\mathcal{M}$, atunci $A+B\in\mathcal{M}$.

c) Să se arate că $\det\left(I_2-A(0,b)\right)\neq 0$, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$.

Problema 23

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. Se notează $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se arate că $A^2+A^3=O_2$.

c) Să se calculeze suma $A+2\cdot A^2+\ldots+10\cdot A^{10}$.

Problema 24

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulţimea

$G=\left\{M(x,y)\,\middle|\,M(x,y)=xI_2+yA,\ x,y\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $A^2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se determine inversa matricei $M(1,1)$.

c) Să se determine matricele inversabile din mulţimea G.

Problema 25

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X(a)\,\middle|\,a\in\mathbb{R}\text{ şi }X(a)=I_2+aA\right\}$.

a) Să se verifice dacă I_2 aparţine mulţimii G.

b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că pentru $a\neq-\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

Problema 26

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det\left(A^2\right)$, ştiind că $A^2=A\cdot A$.

b) Să se determine $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ ştiind că $A\cdot B=I_2$.

c) Ştiind că $A\cdot B=I_2$ să se calculeze $S=(B^{-1}-A)^2$.

Problema 27

1. Fie funcţia $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(A)=A+A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $f(I_2)$.

b) Să se demonstreze că $(A+B)^t=A^t+B^t$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det A=1$ şi $f(A)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Problema 28

1. Se consideră matricele $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det(M_1 + M_2)$.

b) Să se calculeze M_a^2, unde $M_a^2 = M_a \cdot M_a$.

c) Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M_a X = X M_a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

Problema 29

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A(1) \cdot A(-1)$.

b) Să se arate că $(A(x))^2 = A\left((x+1)^2 - 1\right)$, pentru orice x real, unde $(A(x))^2 = (A(x)) \cdot (A(x))$.

c) Să se determine inversa matricei $A(1)$.

Problema 30

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $XA = AX$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că dacă $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci ecuația $Y^2 = A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problema 31

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ cu $a \in \mathbb{R}$ și $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se notează $A^2 = A \cdot A$.

a) Pentru $a = -1$ să se rezolve sistemul.

b) Să se verifice egalitatea $A^2 - (a+1)A + (a-8)I_2 = O_2$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că matricea A verifică egalitatea $A^2 = 9I_2$.

Problema 32

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ cu $x \in \mathbb{R}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A = A \cdot A$.

a) Să se determine numărul real x pentru care $\det(A) = 0$.

b) Să se verifice egalitatea $A^2 = (2x-6)A - \left(x^2 - 6x + 8\right) \cdot I_2$.

c) Să se determine numărul real x pentru care $A^2 = 2A$.

Problema 33

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se demonstreze că $(A + I_2)^{-1} = A - I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine numerele reale x pentru care $\det\left(x^2 A\right) = x^2 \det(A)$.

Problema 34

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $A^2 = 8A$, unde $A^2 = A \cdot A$.

b) Să se calculeze $\det X(a)$.

c) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 8ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 35

1. Se consideră mulţimea matricelor $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Pentru $A,B\in G,$ să se demonstreze că $A+B\in G$.

b) Să se arate că matricea $C\in G$, obţinută pentru $a=5$ şi $b=3$, verifică relaţia $C^2=10C-16I_2$, unde $C^2=C\cdot C$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pentru $a,b\in\mathbb{N}$ să se determine o matrice $D\in G$ care are proprietatea că $\det(D)=2008$.

Problema 36

1. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

a) Ştiind că $ad=4$ şi $bc=3$, să se calculeze $\det(A)$

b) Să se calculeze $A\cdot A^t$.

c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A\cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A)=0$.

Problema 37

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A)=0$.

b) Pentru $a=3$ să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Pentru $a=3$ să se rezolve ecuaţia matricială $A\cdot X=B$.

Problema 38

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se determine x real astfel încât $\det(A-xI_2)=0$.

c) Să se demonstreze că $A^4\cdot X=X\cdot A^4$, pentru orice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A^4=A\cdot A\cdot A\cdot A$.

Problema 39

1. Se consideră matricele $A_x=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, x real şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A_x^2=A_x\cdot A_x$.

a) Să se determine valorile reale ale numărului x pentru care $\det(A_x)=0$.

b) Sa se determine numărul real x astfel încât $A_x^2=I_2$.

c) Să se demonstreze că $A_x^2=2xA_x+(1-x^2)\cdot I_2$.

Problema 40

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| X^2=X\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se verifice că $A\in G$.

b) Să se calculeze $\det\left(A^3-2A^2+A\right)$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

c) Să se demonstreze că $(2X-I_2)^2=I_2$, oricare ar fi $X\in G$.

Problema 41

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze $A\cdot B$.

b) Să se rezolve ecuaţia matricială $A\cdot X=B$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-4A+5I_2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

Problema 42

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ cu $x, y\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine numărul real x astfel încât $A\cdot B=B\cdot A$.

b) Să se verifice că $A^2=4(A-I_2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se determine numărul real a astfel încât $A^3-aA^2+4A=O_2$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

Problema 43

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se demonstreze că $A^3=2^3\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-8A+12I_2=O_2$.

Problema 44

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,X^2=-I_2\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se verifice că $A\in G$.

b) Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X\in G$.

c) Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $A\cdot X=X\cdot A$ este de forma $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$, unde $x, y\in\mathbb{R}$.

Problema 45

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,c,d\in\mathbb{R}^*\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$. Se notează cu X^t transpusa matricei X.

a) Să se calculeze $A^t\cdot A$.

b) Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}$, are loc egalitatea $\det\left(X\cdot X^t\right)=(ad-bc)^2$.

c) Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ cu $\det\left(X\cdot X^t\right)=0$, are loc relația $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Problema 46

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel încât $A+2I_2=O_2$.

b) Să se calculeze determinantul matricei $B=A-A^t$.

c) Să se arate că, dacă $A+A^t=2I_2$, atunci determinantul matricei $A-A^t$ este un număr divizibil cu 4.

Problema 47

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Se notează $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \ldots \cdot X}_{de\ n\ ori}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze X^2.

b) Să se determine inversa matricei X.

c) Să se determine numărul real r astfel încât $X^3 = 3X^2 + rX + I_3$.

Problema 48

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se notează cu $X \cdot X = X^2$.

a) Să se verifice că $A = I_3 + B$.

b) Să se calculeze suma $A^2 + B^2$.

c) Să se calculeze inversa matricei A^2.

Problema 49

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ şi matricea $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $O_3 \in \mathcal{M}$.

b) Să se demonstreze că produsul a două matrice din $\mathcal{M}$ este o matrice din $\mathcal{M}$.

c) Ştiind că $A \in \mathcal{M}$ şi $\det(A) = 0$, să se demonstreze că $A^3 = O_3$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

Problema 50

1. Se consideră matricele $H(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a > 0$.

a) Să se calculeze $\det(H(a)), \forall a > 0.$

b) Să se arate că $H(a) \cdot H(b) = H(a \cdot b), \ \forall a,b > 0.$

c) Să se calculeze determinantul matricei $H(1) + H(2) + H(3) + \ldots + H(2008)$.

Problema 51

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

b) Să se demonstreze că pentru oricare $X, Y \in \mathcal{M}$, rezultă că $XY \in \mathcal{M}$.

c) Să se demonstreze că, dacă $U \in \mathcal{M}$ şi $VU = UV$, pentru orice $V \in \mathcal{M}$, atunci există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 52

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $f(0)+f(1)$.

b) Să se arate că $f(1)\cdot f(-1)=I_3$ unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Să se demonstreze că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

Problema 53

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A=B+I_3$.

b) Să se demonstreze că matricea A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

c) Să se determine numărul real a astfel încât $\det(X(a))=(2a-1)^3$, unde $X(a)=I_3+aA$.

Problema 54

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Definim matricele $A=X\cdot Y^t$ şi

$B(a)=aA+I_3$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi Y^t este transpusa matricei Y.

a) Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}$.

b) Să se calculeze determinantul matricei A.

c) Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Problema 55

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 7 & 5\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Pentru $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X^3=X\cdot X\cdot X$.

a) Să se determine A^{-1}.

b) Să se rezolve ecuația matricială $A^3\cdot X=I_3$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c) Să se calculeze $(B-A)^3$.

Problema 56

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se calculeze A^2 ştiind că $A^2=A\cdot A$.

c) Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

Problema 57

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1&1&3\\-2&2&6\\-3&3&9\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $B=A-I_3$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se calculeze A^2-B^2, unde $A^2=A\cdot A$ şi $B^2=B\cdot B$.

c) Să se arate că inversa matricei B este $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

Problema 58

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Se notează $X^2=X\cdot X$.

a) Să se calculeze AB.

b) Să se demonstreze că $(A+B)^2=(A-B)^2=A^2+B^2$.

c) Să se calculeze inversa matricei $(A-B)^2$.

Problema 59

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\left\{X^n \,\middle|\, n\in\{1,2,3\}\right\}$, unde

$X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice că $X^3=I_3$.

b) Să se calculeze $\det\left(I_3+X+X^2\right)$.

c) Să se demonstreze că, dacă $Y\in G$, atunci $Y^{-1}\in G$.

Problema 60

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

b) Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

c) Să se arate că $\left(f(A)\right)^3=I_3+3B+3B^2$, unde $\left(f(A)\right)^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

Problema 61

1. **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\sqrt{2009}-1&-1\\1&\sqrt{2009}+1\end{vmatrix}$.

b) Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix}x_1&x_2\\-x_2&x_1\end{vmatrix}$, unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei

$x^2-4x+2=0$.

c) Fie matricele $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ şi $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3+A^2+A=O_3$, unde

$A^2=A\cdot A$ şi $A^3=A^2\cdot A$.

Problema 62

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ și matricele $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $B^2=3B$, unde $B^2=B\cdot B$.

b) Să se arate că $mI_3+nB\in G$, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{Z}$.

c) Să se arate că dacă $A\in G$ și $A^2=O_3$, atunci $A=O_3$, unde $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^2=A\cdot A$.

Problema 63

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ fixat, definim matricea $B=aA+I_3$.

a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$.

c) Să se determine B^{-1}.

Problema 64

1. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cu x și y numere reale. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(0,3)$, $O(0,0)$ și $C_n(n+1,2-n)$ cu $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze determinantul matricei M.

b) Să se arate că punctele A,B și C_2 sunt coliniare.

c) Să se determine numărul natural nenul n astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.

Problema 65

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele a,b și c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că pentru $a=c=0$ și $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

c) Să se rezolve ecuația $F\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

Problema 66

1. Fie matricea $A(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_k & x_k^2 \\ -2 & x_k^2 & x_k \end{pmatrix}$, cu $k\in\{0,1,2\}$. $x_0=1$ și x_1,x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2+x-2=0,\ x_1<x_2$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $A(0)$.

b) Să se determine matricea $A(1)+A(2)$.

c) Să se calculeze suma elementelor matricei $A(k)$, pentru fiecare $k\in\{0,1,2\}$.

Problema 67

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$G=\left\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \middle|\ AX=XA\right\}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se demonstreze că $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2=A\cdot A$.

c) Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3+bA\in G$.

Problema 68

1. În mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $C=A+B$.

Se notează cu $X^2=X\cdot X$

a) Să se efectueze produsul $A\cdot B$.

b) Să se calculeze $\det(A)\cdot\det(B)$.

c) Să se demonstreze că $A^2-B^2=6(A+B)$.

Problema 69

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

a) Pentru $a=1$ să se calculeze matricea A^2.

b) Să se calculeze $\det\left(A^2\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că $A^2\neq I_3$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

Problema 70

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricea A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

b) Să se demonstreze că $A^3=4A^2-5A+2I_3$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

c) Să se determine numerele reale m,n,p astfel încât $A^{-1}=mA^2+nA+pI_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

SUCCES!