

Clasa a -V-a

1. Să se afle $x \in \mathbb{N}$, știind că : $2^x + 4^x + 8^x = 84$

Prof. Vasile Uleanu -Colegiul Național „Vlaicu Vodă ”Curtea de Argeș

Soluție

$2^x + (2^x)^2 + (2^x)^3 = 84 \dots\dots\dots 1 \text{ pct.}$
 $2^x = y \Rightarrow y + y^2 + y^3 = 84 \dots\dots\dots 1 \text{ pct.}$
 $y^3 \leq 84 \Rightarrow y \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \dots\dots\dots 2 \text{ pct.}$
 verifică și obține $y = 4 \dots\dots\dots 2 \text{ pct.}$
 $2^x = y = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ pct}$

2. Fie patru numere naturale a, b, c, d care verifică relația :

$$a^3 + b^4 + c^5 + d^6 = 4^{61}.$$

- a) Aflați numerele a, b, c, d și arătați că sunt pătrate perfecte . **(4pct)**
 b) Arătați că $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{113} < a \cdot b \cdot c \cdot d$ **(3 pct)**

Prof. Vasile Uleanu -Colegiul Național „Vlaicu Vodă ”Curtea de Argeș

Soluție

a) $a^3 + b^4 + c^5 + d^6 = 4^{61} = 4^{60} \cdot 4 = 4^{60} (1+1+1+1) = 6^{60} + 6^{60} + 6^{60} + 6^{60} \dots 2 \text{ pct}$

$$\begin{cases} a^3 = 4^{60} \Rightarrow a = 4^{20} = (4^{10})^2 = p \cdot p \\ b^4 = 4^{60} \Rightarrow b = 4^{15} = (2^{15})^2 = p \cdot p \\ c^5 = 4^{60} \Rightarrow c = 4^{12} = (4^6)^2 = p \cdot p \\ d^6 = 4^{60} \Rightarrow d = 4^{10} = (4^5)^2 = p \cdot p. \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$a \cdot b \cdot c \cdot d = 2^{114} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

b) $2^1 + 2^2 + \dots + 2^{113} = 2^{114} - 2 \dots\dots 1 \text{ p}$
 $2^{114} - 2 < 2^{114} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$