FIȘA NR. 1 PREGĂTIREA OLIMPIADEI LOCALE DE MATEMATICĂ CLASA a XI-a

prof. GOBEJ ADRIAN

SUBIECTUL 1 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

1.Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_3(□)$.

a) Să se determine $a,b\in □$ astfel încât $A^2=a\cdot A+b\cdot I_3$.

b) Să se arate că $\det\left(A^n-nA\right)\neq 0,\forall n\in □,n\geq 2$.

BAREM SUBIECTUL 1 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

1 a) Calcul direct $a=2,b=-1$………………………………………………………..2p

b) Se demonstrează prin inducţie că $A^n=nA-(n-1)I_3,\forall n\geq 1$……………4p

$\det\left(A^n-nA\right)=\det\left((1-n)I_3\right)=(1-n)^3\neq 0,\forall n\geq 2$……………………...1p

SUBIECTUL 2 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

2. Șirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ și $(y_n)_{n\geq 0}$ de numere reale sunt definite prin $x_0=y_0=1$ și

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix},\forall n\in □.$$

a) Să se arate că $x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0$ și $y_{n+2}-3y_{n+1}+y_n=0,\forall n\in □$.

b) Să se demonstreze că ecuația $x^2-5y^2=-4$ are o infinitate de soluții în $□\times□$.

BAREM SUBIECTUL 2 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

2. a) Se obţine $2x_{n+1}=3x_n+5y_n, 2y_{n+1}=x_n+3y_n,\forall n\geq 0$…………………….2p

Deoarece $y_n=\dfrac{2x_{n+1}-3x_n}{5}$ și se înlocuiește în a doua relație si dupa calcule se obține concluzia.

Analog se demonstrează a doua relație…………………………………………3p

b) Avem că $(x_0,y_0)=(1,1),(x_1,y_1)=(4,2)$

perechi care verifică ecuația $x^2-5y^2=-4$…………………………………….1p

Se demonstrează prin inducție că perechile $(x_n,y_n),n\geq 0$ sunt soluții si că șirurile sunt strict crescătoare și cu elemente din □ …………………………………………………..1p

SUBIECTUL 3 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

3. Fie $A,B\in M_3(□)$ astfel încât $\det(A)=1$.

a) Să se demonstreze că $\exists b,c,d\in □$ astfel încât $\det(B+xA)=x^3+bx^2+cx+d,\forall x\in □$.

b) Dacă $\det\left(B+\sqrt{2}A\right)=0$, demonstrați că $\exists x_0\in □$ astfel încât $\det\left(B+x_0A\right)=0$.

BAREM SUBIECTUL 3 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

3 a) Deoarece $B+xA\in M_3(\mathbb{Q})$ atunci $\det(B+xA)$ este o funcție de grad cel mult trei în x cu coeficienți raționali……………………………………………………………………..1p

Deci $\exists a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f(x)\overset{not}{=}\det(B+xA)=ax^3+bx^2+cx+d$,

unde $a=\det(A)=1$ și $d=\det(B)$ ………………………………………………….2p

b) $\det\left(B+\sqrt{2}A\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=2b+d+\sqrt{2}(2+c)=0\Rightarrow c=-2,d=-2b$ …………..2p

Atunci $f(x)=x^3+bx^2-2x-2b=\left(x^2-2\right)(x+b)\Rightarrow f(-b)=0$ deci $x_0=-b\in\mathbb{Q}$ ..2p

SUBIECTUL 4 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq1}$ definit prin $x_1=a>1$ și $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{x_n},\forall n\geq1$.

   a) Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq1}$ este divergent.

   b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$.

BAREM SUBIECTUL 4 (ONM LOCALA 2015 –MARAMURES)

4) a) Prin inducție se demonstrează că $x_n>0,\forall n\geq1$ și

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{x_n}>0,\forall n\geq1$ deci șirul este strict crescător………………………..1p

Presupunem că șirul este mărginit superior atunci el este convergent

Atunci $\exists\ell\in\mathbb{R}$ astfel încât $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ și trecând la limită în relația de recurență se obține

$\ell=\dfrac{\ell^2+1}{\ell}\Rightarrow0=1(F)$ deoarece $x_n>1,\forall n\geq1$ și x_n e strict crescător. Prin urmare șirul este nemărginit superior și strict crescător adică are limita $+\infty$, deci divergent…………2p

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2+1}{x_n^2}=1$ ………………………………………..1p

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n\overset{1^\infty}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n^2+1}{x_n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x_n^2}\right)^{x_n^2}\right]^{\frac{n}{x_n^2}}=e^\ell\text{ ,unde}$$

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^2}\overset{LSC}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{x_{n+1}^2-x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{2x_n^2+1}=\frac{1}{2}$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\sqrt{e}$ …………………………………………3p

SUBIECTUL 5 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

1. Se consideră matricele $X \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{C})$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = XY$ și $rangX = 2$.

   Demonstrați următoarele afirmații:

   a) Dacă $n \geq 4$, atunci $A^* = O_n$, unde A^* este adjuncta matricei A.

   b) $rangA = rangY$.

   c) Dacă $rangY \neq 2$, atunci $A^2 = tA$, unde $t = tr(A)$.

BAREM SUBIECTUL 5 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

a) $rangA \leq rangX = 2$ .... 1 punct

Din $rangA = 2$ și $n \geq 4$ rezultă că toți minorii de ordin $(n-1)$ sunt nuli .... 1 punct

$A^* = O_n$ .... 1 punct

b) Aplicarea inegalității lui Sylvester

$rangA = rangXY \geq rangX + rangY - 2 = rangY$

.... 1 punct

$rangA = rangXY \leq rangY,\ rangX = rangY$

.... 1 punct

c) $rangA = rangY \in \{0,1\}$ .... 1 punct

$A^2 = tA$ .... 1 punct

SUBIECTUL 6 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

2. Fie matricea nesingulară $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + A^t) = 12$. Să se arate că

$$\det\left(\sqrt[5]{\frac{1}{3}}A + \sqrt[5]{\frac{8}{3}}A^t\right) = 12 + detA.$$

BAREM SUBIECTUL 6 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

Egalitatea de demonstrat este echivalentă cu $det(A + 2A^t) = 3(12 + detA)$ .... 1 punct

$f(x) = \det(A + xA^t)$ .... 1 punct

$f(x) = d + \propto x + \propto x^2 + dx^3$, unde $d = detA$ .... 2 puncte

$f(x) = 12$ implică $f(x) = d + (6-d)x + (6-d)x^2 + dx^3$ .... 1 punct

$f(2) = 3(12 + d)$ .... 2 puncte

SUBIECTUL 7 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

3. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{45n}\left(-2^{-n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{-n+ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+k}}}\right)}\right).$$

BAREM SUBIECTUL 7 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

Notăm cu $a_n = 2^{45n}\left(-2^{-n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{-n+ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+k}}}\right)}\right)$, $n \geq 1$

$a_n = 2^{44n}\left(-1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+k}}}\right)}\right)$, $n \geq 1$ …………………………………………………… 1 punct

$a_n \leq 2^{44n}\left(-1 + 2^{ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+1}}}\right)}\right) \overset{not}{\widehat{=}} c_n, n \geq 1$ ………………………………………………… 2 puncte

$a_n \geq 0$ sau $a_n \geq 2^{44n}\left(-1 + 2^{ln\left(1+\frac{1}{2^{\sqrt{2015n^2+n}}}\right)}\right) \overset{not}{\widehat{=}} b_n, n \geq 1$ ……………………………… 1 punct

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, ……………………………………………………………… 2 puncte

Criteriul ***cleștelui***, $\lim_{n\to\infty} a = 0$, …………………………………………………………… 1 punct

SUBIECTUL 8 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

4. Se consideră numerele reale strict pozitive a, b, c și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{a}{b^n} + \frac{b}{c^n} + \frac{c}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați că dacă a, b sau $c \in (0,1)$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

b) Demonstrați că dacă $a, b, c \in [1, +\infty)$ și cel puțin două sunt diferite, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

c) Demonstrați că dacă $x_0 \leq x_1$, atunci șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

Gazeta Matematică 10/2014(Enunț modificat)

BAREM SUBIECTUL 8 (ONM LOCALA 2015 – ALBA)

a) Fie $d = min(a, b, c)$. De aici rezultă $d \in (0,1)$ …………………………………………………… 1 punct

$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\propto}{d^n} = +\infty$, unde $\propto \in \{a, b, c\} - \{d\}$ …………………………………… 1 punct

b) $a, b, c \in [1, +\infty)$ implică că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător …………………………………… 1 punct

Fie $d = max(a, b, c)$. Cum $d \in (1, +\infty)$, obținem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător .. 1 punct

c) "⇐" Dacă $a = b = c = 1$, atunci $x_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit ………… 1 punct

"⇒" Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit rezultă că $a, b, c \in [1, +\infty)$ ………………………………… 1 punct

Dacă a, b sau $c \in (1, +\infty)$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, contradicție cu $x_0 \leq x_1$,

deci $a = b = c = 1$ ………………………………………………………………………………… 1 punct

SUBIECTUL 9 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

Fie $H \subset S_n, H \neq \varnothing$, unde S_n este mulţimea permutărilor de ordinul n, iar H are proprietatea: $\forall\, \sigma, \theta \in H \Rightarrow \sigma\theta \in H$. Arătaţi că:

(4p) a) $e \in H$, unde e este permutarea identică.

(3p) b) $\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H$.

***

BAREM SUBIECTUL 9 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

a) Fie $\sigma \in H$; $\{\sigma, \sigma^2, \sigma^3 ...\} \subset H$. Cum S_n este finită, există $k \in N^*$ astfel încât $\sigma^k = e$ ......**(4p)**

b) $\sigma^k = e \Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma^{k-1} \in H$ ....**(3p)**

SUBIECTUL 10 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar h_a, h_b, h_c sunt lungimile înalţimilor triunghiului.

(5p) a) Arătați că $\det A \geq 0$.

(2p) b) În ce condiții avem $\det A = 0$?

GM 12/2014

BAREM SUBIECTUL 10 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

a) Folosind $S = \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2} = \frac{c h_c}{2}$ ....**(1p)**

$\det A = \frac{2S^2}{abc}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq 0$ ....**(4p)**

b) Egalitatea are loc în triunghiul echilateral ....**(2p)**

SUBIECTUL 11 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

Se consideră șirul $(x_n)_{n\in N}$, $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = 1 + 3x_n + x_n^2$, pentru orice n număr natural.

(3p) a) Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\in N}$ este monoton și nemărginit.

(4p) b) Calculaţi limitele următoarelor şiruri: $\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)_{n\in N}, \left(\sqrt[n]{x_n}\right)_{n\in N}, \left(\frac{n}{x_n}\right)_{n\in N}$.

BAREM SUBIECTUL 11 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

a) $x_{n+1} - x_n = (1 + x_n)^2 \geq 0$, deci $(x_n)_{n\in N}$ crescător ....**(1p)**

Orice şir monoton are limită , deci $x_n \to l, l \in \overline{R}$ ....**(1p)**

Trecând la limită în relația de recurență se obține l $= l = +\infty$ ....**(1p)**

(***SAU*** se poate folosi inducția pentru a arăta ca $x_n > n$)

b) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{x_n} + x_n + 3 \to +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} \to 0$ ....**(1p)**

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \to +\infty \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \to +\infty$ ....**(1p)**

Se aplică Lema lui Stoltz și se obține $\frac{n}{x_n} \to 0$ ....**(2p)**

SUBIECTUL 12 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

Fie funcțiile $f_p : (-\infty, -p] \cup [0, +\infty) \to R,\ f_p(x) = \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2x} + \ldots + \sqrt{x^2+px}$, unde $p \in N^*$.

(3p) a) Determinaţi ecuațiile asimptotelor funcției f_2.

(4p) b) Demonstrați că $\lim_{x \searrow 0} \frac{f_p^2(x)}{x}$ există și are loc inegalitatea $\lim_{x \searrow 0} \frac{f_p^2(x)}{x} \le \frac{p^2(p+1)}{2}$.

BAREM SUBIECTUL 12 (ONM LOCALA 2015 – SIBIU)

a) $\lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = +\infty$, deci nu există asimptote orizontale ....**(1p)**

$y = -2x - \frac{3}{2}$ asimptotă oblică spre -∞ ....**(1p)**

$y = 2x + \frac{3}{2}$ asimptotă oblică spre +∞ ....**(1p)**

b) $\lim_{x \searrow 0}\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x}} + \sqrt{\frac{x^2+2x}{x}} + \ldots + \sqrt{\frac{x^2+px}{x}}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{p}\right)^2$ ....**(2p)**

$\left(1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{p}\right)^2 = 1 + 2 + \ldots + p + 2\sum_{1 \le i < j \le p} \sqrt{ij} \le \frac{p(p+1)}{2} + \sum_{1 \le i < j \le p} (i+j) = \frac{p^2(p+1)}{2}$ ....**(2p)**

(Inegalitatea se poate dovedi și cu metoda inducției matematice.)

SUBIECTUL 13 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

Fie marticile A,B,C,D ∈ $M_n(C)$ a.î. $A^3 = -BCD$, $B^3 = -CDA$, $C^3 = -DAB$, $D^3 = -ABC$

a) Să se arate că $A^4 = B^4 = C^4 = D^4$

b) Să se dea un exemplu de matrici A,B,C,D care verifică simultan condițiile din ipoteză

BAREM SUBIECTUL 13 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

a) $A^4 = A^3A = (-BCD)A = B(-CDA) = BB^3 = B^4$ ……………………………………………………..1p

$C^4 = CC^3 = C(-DAB) = (-CDA)B = B^3B = B^4$ ………………………………………...1p

$D^4 = DD^3 = D(-ABC) = (-DAB)C = C^3C = C^4$ ……………………………………….1p

Finalizare $A^4 = B^4 = C^4 = D^4$ ………………………………………………………1p

b) A , -A , iA , -iA ($i^4=1$) și verificările …………………………………………………..3p

SUBIECTUL 14 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ verifică relaţia :

$(n+2)\,x_{n+2} - (n+3)\,x_{n+1} + x_n = 0$, $\forall\, n \geq 0$, atunci el este convergent şi calculaţi limita lui.

BAREM SUBIECTUL 14 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

Relaţia se mai poate scrie : $(n+2)(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = 0$ ………………………….1p

Notează $y_n = x_{n+1} - x_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{n+2} y_n$ ……………………………………………..1p

$y_n = \frac{1}{(n+1)!} y_0$ …………………………………………………………………………………1p

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!}(x_1 - x_0)$ ……………………………………………………………..1p

$x_n = x_0 + (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!})(x_1 - x_0)$ ……………………………………………………..1p

$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, $E_n \to e \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \to e - 1$ ……………………………….1p

Finalizare $x_n \to x_0 + (e-1)(x_1 - x_0)$ ………………………………………………………..1p

SUBIECTUL 15 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = a.A^3 + x.A^2 + (a-x).A$

Să se arate că $a.\det B \geq 0$, $\forall\, a, x \in \mathbf{R}$

BAREM SUBIECTUL 15 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

Calculează $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = I_3$ ……………………………………………………………2p

obţine $B = \begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}$ ………………………………..1p

$\det B = 2a(3x^2 - 3ax + a^2)$ ………………………………………………………………………1p

$a \det B = 2a^2(3x^2 - 3ax + a^2)$ ……………………………………………………………………1p

$3x^2 - 3ax + a^2 \geq 0$ ($\Delta = -3a^2 \leq 0$)………………………………………………………………..1p

Finalizare $2a^2(3x^2 - 3ax + a^2) \geq 0$ ……………………………………………………………1p

SUBIECTUL 16 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale şi A^t matricea transpusă. Ştiind că $\det(A + A^t) = 8$ şi $\det(A + 2A^t) = 27$. Să se calculeze det A

G.M. nr 11 / 2014

BAREM SUBIECTUL 16 (ONM LOCALA 2015 – ARGES)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$ ………………………………..1p

$\det(A + A^t) = 4ad - b^2 - 2bc - c^2$ ………………………………………..1p

$A + 2A^t = \begin{pmatrix} 3a & b+2c \\ c+2b & 3d \end{pmatrix}$ ……………………………………………………….1p

$\det(A + 2A^t) = 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2$ ……………………………………………… 1p

$\begin{cases} 4ad - b^2 - 2bc - c^2 = 8 \\ 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2 = 27 \end{cases}$ ……………………………………………….1p

Finalizare $ad - bc = 11$, deci $\det A = 11$ …………………………………………2p