MINISTERUL EDUCAŢIEI ,CERCETĂRII,TINERETULUI ŞI SPORTULUI

COLEGIUL NAŢIONAL VLAICU VODĂ

Municipiul Curtea de Argeş,

Strada Negru Vodă nr. 131, Judeţul Argeş, cod 115300

FIȘA NR. 6 PREGĂTIREA OLIMPIADEI LOCALE DE MATEMATICĂ

prof. GOBEJ ADRIAN

SETUL NR. 1 propunere Faza pe scoala

Clasa a VII-a

SUBIECTUL I

a) Determinați media geometrică a numerelor :

$$a=\sqrt{\frac{1+2+3+...224}{100+101+102+...124}} \quad \text{și} \quad b=\sqrt{\frac{1+3+5+...201}{9+27+45+...+1809}}\ .$$

b) Arătați că numărul $1+\ 3+5+...+\ (2n+1)$, *este pătrat perfect , oricare ar fi* $n\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL II

Stabiliți dacă numărul $N=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+...+\sqrt{2^{100}}\right):\left(2+\sqrt{2}\right)$ *este natural .*

SUBIECTUL III

În $\Delta ABC, m(\sphericalangle A)=90^0$. *Notăm cu* P *intersecția înălțimii* AD *cu bisectoarea* $(CE$, $D\in BC, E\in AB$ *și* $EF\perp BC$, $F\in BC$. *Arătați că :*

a) ΔAEP *este isoscel,*

b) *Patrulaterul AEFP este romb.*

SUBIECTUL IV

Trapezul dreptunghic ABCD, are $AB\parallel CD$, $AB>CD$, $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^0$ *și BD este bisectoarea* $\sphericalangle ABC$. *Se duce* $CM\perp BD$, $M\in BD$ *și se notează cu P și N simetricele punctului M față de dreptele AD și AB.Arătați că :*

a) *Punctele P ; A și N sunt coliniare,*

b) *BNPD este parelelogram.*

CONCURS TOMIS 2015 –Constanta

1. Fie $A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2014\cdot 2015}}$.Atunci partea întreagă a numărului real $\sqrt{2015}\cdot A$ este egal cu:

a) 41 **b)** 42 **c)** 43 **d)** 44

2. Dacă $A=\sqrt{2014\cdot 2015+\sqrt{2014\cdot 2015+\sqrt{2014\cdot 2015}}}$, atunci:

a) A>2015 **b)** A=2015 **c)** A<2015 **d)** A<2014

3. Dacă $x,y,z\in R$ astfel încât $-1<x<1$, $x+1-2y=0$ şi $z=\sqrt{6(x+1)^2+y^2}+\sqrt{6(x-1)^2+(y-1)^2}$, atunci z este egal cu:

a) $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{5}{2}$ **c)** 3 **d)** 5

4. În triunghiul ABC, $[BB']$ şi $[CC']$sunt mediane, unde $B'\in[AC]$şi $C'\in[AB]$, iar $BB'=9cm$, $CC'=12cm$. Dacă $BC=10cm$, atunci aria triunghiului ABC este egală cu:

a) $48cm^2$ **b)** $54cm^2$ **c)** $72cm^2$ **d)** $84cm^2$

5. Fie ABCD un trapez isoscel cu baza mică $[AB]$, $[AB]\equiv[AD]$, iar $BD\perp BC$. Atunci $\frac{AB}{CD}$este egal cu:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{1}{4}$

6. Fie $n\in N^*$ şi $A=\left\{\frac{n^2}{2015},\frac{n^2+1}{2015},\frac{n^2+2}{2015},...,\frac{n^2+2015}{2015}\right\}$. Dacă A conţine exact două numere naturale, atunci valoarea minimă a lui n este egală cu:

a) 55 **b)** 1375 **c)** 31 **d)** 2015

6. Fie $n\in N^*$ şi $A=\left\{\frac{n^2}{2015},\frac{n^2+1}{2015},\frac{n^2+2}{2015},...,\frac{n^2+2015}{2015}\right\}$. Dacă A conţine exact două numere naturale, atunci valoarea minimă a lui n este egală cu:

a) 55 **b)** 1375 **c)** 31 **d)** 2015

7. Fie pătratul ABCD şi rombul CEBF, unde $E\in Int(ABCD)$ şi $F\in Ext(ABCD)$, iar $m\angle(ECF)=120^\circ$. Atunci $m\angle(AED)$ este:

a) 100° **b)** 120° **c)** 175° **d)** 150°

8. Dacă $x,y\in R^*$astfel încât $5x^3+2x^2y=2y^3+5xy^2$ şi $a=\frac{3x+4y}{4x+3y}$, atunci:

a) $|a|\le 2$ **b)** a < -2 **c)** $a\ge 3$ **d)** $a\notin Z$

9. Fie triunghiul ABC, unde $AB=4cm$, $BC=6cm$, $AC=5cm$. Fie punctele D şi E astfel încât $B\in(AD)$şi $C\in(AE)$, $BD=6cm$ şi $CE=3cm$. Atunci DE este:

a) 11 cm **b)** 12 cm **c)** 10 cm **d)** 14 cm

10. Fie $A=\{n\in N/\sqrt{9n+1}\text{ si }\sqrt{11n+4}\text{ sunt numere naturale consecutive}\}$. Atunci cardA este:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

11. Dacă $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+...+n}=\frac{1004}{1005}$, atunci n este egal cu:

a) 1006 **b)** 2008 **c)** 1004 **d)** 2009

12. Dacă M și N sunt mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[CD]$ ale paralelogramului ABCD și $AM \cap BN=\{E\}$, atunci valoarea raportului $\frac{EA}{EM}$ este egală cu :

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** $\frac{9}{2}$

13. Dacă $y=\sqrt{x\cdot a}$, $z=\sqrt{y\cdot b}$, $b=\frac{a+x}{2}$, $c=\frac{y+b}{2}$ și 0< x< a, atunci:

a) a<x<y<b<c<z **b)** x<y<z<c<b<a **c)** y<x<a<z<b<c **d)** x<z<y<b<c<a

14. Fie ABC un triunghi și M un punct variabil pe latura $[BC]$. Paralelele prin B și C la AM intersectează dreptele AC și AB în punctele N și P. Atunci minimul expresiei $\frac{BN+CP}{AM}$ este:

a) $\frac{5}{2}$ **b)** 3 **c)** 4 **d)** 6

15. Fie a, b numere prime și $c\in N$ astfel încât $2\sqrt{a}+7\sqrt{b}=c\sqrt{3}$. Atunci $a^2+b^2+c^2$ are valoarea:

a) 91 **b)** 97 **c)** 99 **d)** 103

16. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=15cm$ și $AC=20cm$. Dacă $E\in(BC)$ astfel încât $m\angle(BAE)=m\angle(CAE)$ și $D=pr_{BC}A$, atunci $tg\angle(DAE)$ este:

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{7}$ **c)** $\frac{1}{8}$ **d)** $\frac{1}{9}$

17. Fie triunghiul echilateral ABC cu înălțimea egală cu $\sqrt{3}cm$. Fie M un punct interior triunghiului ABC și N, P, Q proiecțiile punctului M pe laturile $[BC],[CA],[AB]$. Dacă $BN=x, CP=y, AQ=z$, atunci x+y+z are valoarea:

a) 2 cm **b)** 3 cm **c)** $\sqrt{3}$ cm **d)** $2\sqrt{3}$ cm

18. Fie $n\in N$ astfel încât $\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)^2=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Atunci n este egal cu:

a) 224 **b)** 225 **c)** 255 **d)** 256

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 28.02.2015

Clasa a VII-a

1. (3p) a) Comparaţi numerele: $A=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+...+\frac{2}{2013\cdot 2015}$ şi

$$B=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+...+\frac{3}{2014\cdot 2017}.$$

(4p) b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$\frac{x+1}{3}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+3}{5}+...+\frac{x+2015}{2017}=2015.$$

2. (7p) Demonstraţi că într-un trapez isoscel înălţimea este egală cu linia mijlocie dacă şi numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

3. (3p) a) Arătaţi că oricare ar fi numerele reale *a*, *b*, *c* avem

$$|a+b|+|a+c|\geq |b-c|.$$

(4p) b) Demonstraţi că pentru orice număr real *x* avem

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+...+|x+2014|\geq 1007^2.$$

GM11/2014

4. (7p) În triunghiul *ABC*, având $m(\hat{A})=90^0$, *AD* este înălţime, unde $D\in BC$. Bisectoarea unghiului *B* intersectează segmentele *(AD)* şi *(AC)* în punctele *E*, respectiv *F*. Ştiind că $m(\widehat{AEF})=60^0$, determinaţi raportul ariilor triunghiurilor *FED* şi *ABC*.

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a VII-a

1. a) $A=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}=1-\frac{1}{2015}$ ....**(1p)**

$B=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+...+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2017}=1-\frac{1}{2017}$ ....**(1p)**

$\frac{1}{2015}>\frac{1}{2017}\Rightarrow A<B$ ....**(1p)**

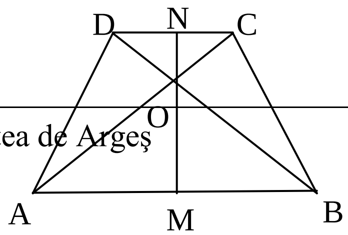
b) Ecuaţia este echivalentă cu: $\frac{x+1}{3}-1+\frac{x+2}{4}-1+\frac{x+3}{5}-1+...+\frac{x+2015}{2017}-1=0$ ....**(1p)**

$\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{4}+\frac{x-2}{5}+...+\frac{x-2}{2017}=0$ ....**(1p)**

$(x-2)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2017}\right)=0$ ....**(1p)**

Deoarece $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2017}\neq 0$, obţinem $x-2=0$, adică $S=\{2\}$ ....**(1p)**

2. *ABCD* trapez isoscel, *AB*||*CD*, *AB*>*CD*, $AC\cap BD=\{O\}$, *M* şi *N* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *DC*, $OM=x$ şi $ON=y$.



MN este axa de simetrie a trapezului, deci punctele M, O şi N sunt coliniare ....**(1p)**

$(\rightarrow)$ Dacă $BD \perp AC$, atunci $AB = 2x$ şi $DC = 2y$, conform teoremei medianei aplicate în triunghiurile dreptunghice AOB şi COD ....**(1p)**

$MN = x + y \Rightarrow MN = \dfrac{AB + DC}{2}$ ....**(1p)**

$(\leftarrow)$ Dacă $MN = \dfrac{AB + DC}{2} \Rightarrow x + y = \dfrac{AB + DC}{2}$, folosind faptul că $\Delta AOB \sim \Delta COD$, se obţine $\dfrac{x}{y} = \dfrac{AB}{DC}$ ....**(2p)**

$\dfrac{x + y}{y} = \dfrac{AB + DC}{DC} \Rightarrow y = \dfrac{DC}{2}$ ....**(1p)**

Folosind reciproca teoremei medianei, se obţine că triunghiul DOC este dreptunghic în O, deci diagonalele trapezului sunt perpendiculare ....**(1p)**

3. **a)** $|a+b| + |a+c| = |a+b| + |-a-c| \geq$ ....**(1p)** $\geq |a+b-a-c| = |b-c|$, pentru oricare două numere reale a şi b ....**(2p)**

b) Notând suma cu S avem $S = |x+2014| + |x+1| + |x+2013| + |x+2| + ... + |x+1008| + |x+1009|$ ....**(1p)**Aplicând punctul a) pentru fiecare doi termeni consecutivi se obţine

$S \geq 2013 + 2011 + 2009 + ... + 3 + 1 = \dfrac{1}{2} \cdot 2014 \cdot 1007 = 1007^2$ ....**(3p)**

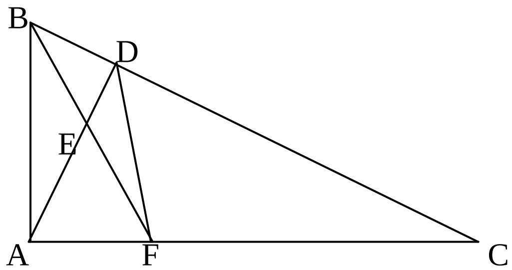
4. $m(A\hat{E}F) = m(B\hat{E}D) = 60^0 \Rightarrow m(E\hat{B}C) = m(A\hat{B}E) = m(\hat{C}) = 30^0$ ....**(1p)**

ΔAEF este echilateral şi ΔAEB este isoscel ....**(1p)**

Aplicând succesiv teorema unghiului de 30^0 în triunghiurile ABC şi BED, avem:

$AB = x$, $BC = 2x$, $ED = y$, $BE = 2y$ ....**(1p)**

$\dfrac{A_{\Delta FED}}{A_{\Delta FAE}} = \dfrac{ED}{AE} = \dfrac{ED}{BE} = \dfrac{1}{2}$ (1) ....**(1p)**



$\dfrac{A_{\Delta FAE}}{A_{\Delta FAB}} = \dfrac{1}{2}$ (2), conform teoremei medianei în triunghiul dreptunghic ABF ....**(1p)**

$\dfrac{A_{\Delta FAB}}{A_{\Delta FBC}} = \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$, conform teoremei bisectoarei în triunghiul ABC, de unde

$\dfrac{A_{\Delta FAB}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{3}$ (3) ....**(1p)**

Înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem $\dfrac{A_{\Delta FED}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$ ....**(1p)**

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ TIMISOARA

etapa locală – 19 februarie 2015

CLASA A VII-A

1. Arătaţi că $\sqrt{2016^n + 2015x^2 + 2017}$ este număr iraţional, oricare ar fi numerele naturale x şi n.
2. Să se rezolve ecuaţia: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+x} = \frac{2015}{1008}$.
3. Fie trapezul dreptunghic ABCD cu m(∢A) = m(∢D) = 90°, iar M mijlocul lui [AD]. Dacă BM ⊥ AC, atunci BD ⊥ MC.
4. Să se demonstreze că, într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°, lungimea bisectoarei unghiului drept este jumătate din lungimea bisectoarei unghiului de 30°.

(GM nr. 6-7-8/ 2013)

SOLUŢII ŞI BAREM

1.	Fie a = $2016^n + 2015x^2 + 2017$. Vom arăta că a nu este pătrat perfect.	1p
	U (2016^n) ∈ { 1 , 6}	1p
	U ($2015x^2$) ∈ { 0 , 5}	2p
	Deci ultima cifră a lui a este 3 sau 8 (din 4 cazuri distincte)	2p
	Nr. a nu este pătrat perfect şi $\sqrt{2016^n + 2015x^2 + 2017}$ este iraţional.	1p
2.	$\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}} + \cdots + \frac{1}{\frac{x\cdot(x+1)}{2}} = \frac{2015}{1008}$	1p
	$\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{1008}$	1p
	$2\cdot\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{x(x+1)}\right] = \frac{2015}{1008}$	1p
	$2\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2015}{1008}$	1p
	$2\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2015}{1008}$	1p
	$\frac{2x}{x+1} = \frac{2015}{1008}$	1p
	$x = 2015$	1p
3.	Fie BM ∩ CD = {E}	1p
	Δ MAB ≡ Δ MDE (ULU) ⇒[DE] ≡ [AB] şi cum DE ‖ AB ⇒ ABDE paralelogram ⇒ DB ‖ AE	2p
	În Δ ACE: AD ⊥ CE şi EQ ⊥ AC ({Q}= BE∩AC) ⇒ M este ortocentrul triunghiului	2p
	⇒ CM ⊥ AE şi cum AE ‖ DB ⇒ CM ⊥ DB	2p
4.	Fie ΔABC cu m(∢A) = 90°, m(∢B) = 30°, (BE bisectoarea ∢B şi (AD bisectoarea ∢A. Construim AF ⊥ BC, F ∈ BC. m(∢FAB) = 60° ⇒ m(∢FAD) = 60° - 45° = 15°	1p
	ΔFAD ~ ΔABE (UU) ⇒ $\frac{AD}{BE} = \frac{AF}{AB}$ (1)	2p
	ΔAFC ~ ΔBAC (UU) ⇒ $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{BC}$ (2)	2p
	m(∢B) = 30° ⇒ $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ (3)	1p
	Din (1), (2) şi (3) ⇒ $\frac{AD}{BE} = \frac{1}{2}$ sau BE = 2AD	1p