



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI SPORTULUI

COLEGIUL NAȚIONAL VLAICU VODĂ

Municipiul Curtea de Argeș,

Strada Negru Vodă nr. 131, Județul Argeș, cod 115300

Telefon: 0248 721553 / Fax: 0248 721389;

E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com

Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

FIȘĂ FINALĂ LIMITE DE FUNCȚII BACALAUREAT-MATE INFO

Nedeterminări : $\frac{\infty}{\infty}$

Să se calculeze limitele de funcții:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8}{2x^2+5x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+x^2}{x^2+4}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^2+3x-5}{4x^2-1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-x^2}{3x^3+x+2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-5x+11}{-3x^3+4x^2-\sqrt{6}}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+3}{\sqrt{2x^2-5}}$;

7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x-1|}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{|x-1|}$; 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$; 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$;

11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}}$; 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}}$; 13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$;

14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}}$; 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}}$;

17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^4+2x)}$; 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x}+1)}{\ln(e^x+1)}$; 19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^3-x^3}{2x^2+5x}$;

Să se determine parametrii reali a și b , astfel încât :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0 ;$$

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^2}{3x^6 + x^3 + 2x^2} ; 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} ; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x^2 + 3} ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} ; 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} ; 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} ;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} ; 8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} ; 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^4 - x} ;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} ; 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4} ; 12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} ;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x - 1)}{(x - 1)^2} ; n \in \mathbb{N}^* ; 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} ; m, n \in \mathbb{N}^* ; m \neq n.$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{12x^3 + 28x^2 + 3x - 18}{4x^3 + 20x^2 + 33x + 18} ; 15) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 + 6x + 8} ;$$

✚ m și p fiind numere naturale, să se afle :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} .$$

✚ Să se afle :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - 1)^3 a - (a - 1)^3 x}{(x - 1)^2 a - (a - 1)^2 x} .$$

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{5x} - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{x^3 - 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{3}x} - 1}{x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - e^{4x}}{e^{5x} - e^{2x}}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 27}{x - 3}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha x} - 1}{\beta x}$, ($\alpha > 0$);

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^x - 64}{x - 3}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{4x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{6x}$.

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{7x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\ln(1 + 2x)}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x - x^2)}{x}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + x^4 - x^2)}{1 - x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\ln(1 + 4x)}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 + 2x)}{2x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 27 + \ln(x - 2)}{x - 3}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 3x)}{\ln(1 + \sin 5x)}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}{5x}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin x)}{\sin 3x}$.

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{7x} ; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 9x} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (x^3 - x^2)}{3x^2} ; 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{5x^2} ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{x} ; 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x} ; 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} ;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin (x - 2)}{x^2 - 3x + 2} ; 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (x \sin 3x)}{x^2} ; 10) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin (x^2 + x - 2)}{\sin (x^2 + 3x + 2)} ;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin (x^2 - 9)}{\arcsin (x^2 + x - 6)} ; 12) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\arcsin (x^2 - 5x + 4)}{x^2 - 16} ; 13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin (x - 1)}{x^2 - 1} .$$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 10x} ; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 5x} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}, \beta \neq 0.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{\operatorname{tg} (3x - 2)}{3x^2 + x - 2} ; 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 5x} .$$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} ; 2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin (1 - 2x)}{\operatorname{tg} (4x^2 - 1)} ; 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin (x - 3)}{\operatorname{arctg} (x^2 - 9)} .$$

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x-1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{4+3x} - 2}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} - 3}{x^2 + x - 2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x}}{x}$;

15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2}}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$; 16) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{1 - \sqrt{5-x}}$;

17) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$; 19) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x-a}$.

Nedeterminări : $\infty - \infty$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 + x - 1})$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3})$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 8x + 6} + x\sqrt{3})$; 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{9x^2 + 5} + 3x)$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x)$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{2x^2 + 3x - 2})$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2\sqrt{x^2 + 1})$; 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 1})$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - x + 1} + 2x)$; 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 3})$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$; 14) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$; 15) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin 2x} \right)$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$; 17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2} \right)$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$; 19) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x - 2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x + 1) - \ln x)$; 21) $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x + 2) - \ln x]$;

Nedeterminări : 1^∞

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x ; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x ; 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x ; 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{x^2+1} ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} (13 - 4x)^{\frac{1}{x-3}} ; 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{x^2} ; 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+1} ;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}} ; 8) \lim_{x \rightarrow 6} (7 - x)^{\frac{1}{x-6}} ; 9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{\sqrt{-x}} ;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{2x}} ; 11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} ; 12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} ;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} ; 14) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} ; 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \right)^x \left(\frac{x+3}{x+5} \right)^x ;$$

✚ Aflați valorile parametrului a , pentru care :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 3x - 2} \right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{\sqrt{x^2+4}} \text{ este : a) } e^{-2} ; \text{ b) } e ; \text{ c) } 1 ; \text{ d) } e^2 ; \text{ e) } e^{-1} .$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{1+x^3} - \frac{1}{1+x} \right) \text{ este: a) } 0 ; \text{ b) } 1 ; \text{ c) } \sqrt{2} ; \text{ d) } \sqrt{3} ; \text{ e) } \infty .$$

Limite de funcții

Nedeterminări

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} ; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{\pi}{x} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right) ; 4) \lim_{x \downarrow 0} x^{tg x} ;$$

$$5) \lim_{x \downarrow 2} (x - 2)^{\sin(x-2)} ; 6) \lim_{x \downarrow 1} (x - 1)^{tg(x-1)} ; 7) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2 - 1} \right) ;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} ; 9) \lim_{x \downarrow 0} x^x ; 10) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[x]{\frac{2x-1}{x+1}} - 1 \right) ; 11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1} ;$$

✚ Determinați $a \in \mathbf{R}$, astfel încât : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3ax}{2x^2 - 1} \right)^x = e^2$.

✚ Determinați $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{ax^3 + bx^2} - 2x \right) = -\frac{1}{3}$.

✚ Determinați $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 4x + 1} - ax - b \right) = 2\sqrt{2}$.

✚ Determinați $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) = 0$

✚ Determinați $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + b} - cx \right) = 3$.

✚ Să se determine mulțimea $A \subset \mathbf{R}$, astfel încât pentru orice $a \in A$ și pentru orice $x \in \mathbf{R}$, să avem : $ax^2 + x + 3 \geq 0$. Pentru fiecare $a \in A$, să se calculeze : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 1 - \sqrt{ax^2 + x + 3} \right)$.

Nr. 1

Test de evaluare sumativă

Limite de funcții

Clasa a XI-a, M2, 3h/săpt.

1) (1p) Să se calculeze limita : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

2) (1p) Să se calculeze limita : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

3) (1,5p) Să se calculeze limita : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{\ln(e^x + 1)}$.

4) (1,5p) Să se calculeze limita : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 27 + \ln(x - 2)}{x - 3}$.

5) (1p) Să se calculeze limita : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x}{\operatorname{tg} 4x}$.

6) (1p) Să se calculeze limita : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 1} \right)$.

7) (2p) Determinați parametrul $m \in \mathbf{R}$, astfel încât :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3mx}{2x^2 - 1} \right)^x = e^2.$$

Notă: 1) Toate subiectele sunt obligatorii.

2) Timp de lucru : 50 minute.

3) Se acordă 1p din oficiu.

Prof. GOBEJ ADRIAN

Nr. 2

Test de evaluare sumativă

Limite de funcții

Clasa a XI-a, M2, 3h/săpt.

1) (1p) Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$.

2) (1p) Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3) (1,5p) Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x)}{\ln(x^4 + 2x)}$.

4) (1,5p) Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 + 2x)}{2x}$.

5) (1p) Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 13x}{\sin 5x}$.

6) (1p) Să se calculeze limita: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2\sqrt{x^2 + 1} \right)$.

7) (2p) Aflați valoarea parametrului $\lambda \in \mathbf{R}$, pentru care :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + \lambda x + 1}{x^2 + 3x - 2} \right)^x = e.$$

Notă: 1) Toate subiectele sunt obligatorii.

2) Timp de lucru : 50 minute.

3) Se acordă 1p din oficiu.

Prof. GOBEJ ADRIAN