OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A X-A

Subiecte

1. Fie $a,b\in\mathbb{C}$ și funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definită prin $f(z)=z^2+a|z|+b$

i) Determinați $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $f(1)=f(2)=0$.

ii) Pentru $a=-3,\ b=2$, aflați toate numerele complexe z cu $f(z)=0$.

Gazeta Matematică

2. Arătați că dacă $a,b,c>1$ astfel încât $a+b+c=6$, atunci are loc inegalitatea :

$$\frac{log_{a+b}^2(b+c)}{c+a}+\frac{log_{b+c}^2(c+a)}{a+b}+\frac{log_{c+a}^2(a+b)}{b+c}\ge\frac{3}{4}$$

Prof. Roxana Soare, Ploiești

3. Fie functia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile :

(i) f impară;

(ii) f injectivă;

(iii) $f_3(x)=f_2(x)-f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}(x)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a. Arătați că $\mathbf{f_6(x)=x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b. Demonstrați că f este surjectivă.

c. Demonstrați că $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot f^{-1}(x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Prof. Vasile Coman, Vălenii de Munte

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(a+ib)=[a]+i[b]$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui numărului real x.

a) Fie ABC un triunghi în planul complex și z_A,z_B,z_C afixele vărfurilor , iar G centrul de greutate de afix z_G. Arătați că, dacă $f(z_A)=f(z_B)=f(z_C)$, atunci $f(z_G)=f(z_A)$.

b) Calculați $f(z_1)+f(z_2)+\ldots+f(z_{2016})$, unde $z_1,z_2,\ldots z_{2016}$ sunt rădăcinile de ordin 2016 ale unității.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.