OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A XI-A

Subiecte

1. Fie $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos^2 nx & \sin 2nx & \cos 2nx \\ \cos^2 ny & \sin 2ny & \cos 2ny \\ \cos^2 nz & \sin 2nz & \cos 2nz \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*,\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că $|\Delta_n| < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*,\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

Prof. Vasile Coman, Valenii de Munte

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Definim șirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = tr(A^n), n \geq 1$ cu $a_0 = tr(I_2)$.

Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (unde $tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ reprezintă urma matricei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).

Prof. Gabriel Necula, Breaza

3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = \sqrt{a_n + a^2} - a,\ n \geq 0$, unde $a \geq \frac{1}{2}$. Fie $b_n = na_n$.

Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Prof. Petre Năchilă, Ploieşti

4. Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$ considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1 = a,\ x_2 = b$ și

$$x_n = \begin{cases} x_1 + x_3 + ... + x_{n-2},\ n\ impar, n \geq 3 \\ x_2 + x_4 + ... + x_{n-2},\ n\ \ par, n \geq 4 \end{cases}.$$

Determinați $\frac{a}{b}$ știind că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, unde $y_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{\sqrt{2}^n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.