OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 23.01.2016 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Calculați: $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2}dx, \quad x>0$

***

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup, de element neutru e, cu proprietatea că există $a,b \in G$ astfel încât $a^2, b^2 \neq e$ si $x^2 = e, (\forall) x \in G \setminus \{a,b\}$.

a) Arătați ca $a^3 = b^3 = e$ sau $a^4 = b^4 = e$;

b) Dați un exemplu de un grup finit cu proprietatea din enunț pentru care $a^3 = b^3 = e$, respectiv pentru care $a^4 = b^4 = e$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

3. Fie $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{\sqrt{[x]}+\sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}}$, unde $[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x. Cercetați existența primitivelor pe domeniul de definiție al funcției f.

Prof. Dan Isbășoiu, U.P.G. Ploiesti

4. a)Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferite , care admit primitive. Fie F,G primitive ale funcțiilor f, respectiv g și $\overline{f}(x) = [F(x)], \ \overline{g}(x) = [G(x)], \quad \overline{f}, \overline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ Arătați că dacă $\{f(x)\} = \{g(x)\}$, atunci $\overline{f}$ și $\overline{g}$ sunt diferite ($[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x).

b)Dacă H este o primitivă a funcției $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $[H(x)] = [x^2]$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, arătați că există $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $h(\alpha) = 2\alpha.$

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

SUCCES!

Notă:

Timp de lucru : *3 ore*. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.