MINISTERUL EDUCAŢIEI ,CERCETĂRII,TINERETULUI ŞI SPORTULUI
COLEGIUL NAŢIONAL VLAICU VODĂ
Municipiul Curtea de Argeş,
Strada Negru Vodă nr. 131, Judeţul Argeş, cod 115300
Telefon:0248 721553 / Fax: 0248 721389;
E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com
Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

FIȘA NR. 3 – pregatire OLIMPIADA LOCALA MATEMATICĂ FEBRUARIE 2016–CLASA a VII-A A/B

Problema nr. 1 (CRITERIU DE DIVIZIBILITATE CU 11)

Determinaţi cel mai mare număr natural divizibil cu 11 scris cu 10 cifre diferite.

SOLUȚIE PR. NR. 1

Fie $n=\overline{a_1a_2...a_{10}}$ numărul cerut. Atunci $\{a_1,a_2,...,a_{10}\}=\{0,1,2,...,9\}$.	
Numărul n se divide cu 11 dacă şi numai dacă numărul $(a_1+a_3+...+a_9)-(a_2+a_4+...+a_{10})$ se divide cu 11.	**2p**
Cum $a_1+a_2+...+a_{10}=45$, deducem $(a_1+a_3+...+a_9)-(a_2+a_4+...+a_{10})=\pm 11$	**2p**
Pentru numărul maxim luăm $a_1+a_3+...+a_9=28$ şi $a_2+a_4+...+a_{10}=17$	**1p**
Considerăm $\{a_1,a_3,...,a_9\}=\{9,7,5,4,3\}$, iar $\{a_2,a_4,...,a_{10}\}=\{8,6,2,1,0\}$.	
Formăm numărul 9876534120.	**2p**

Problema nr. 2 (FRAȚII)

Determinaţi fracţiile de forma $\frac{x}{y}$, unde x şi y sunt numere naturale nenule ştiind că, dacă se măresc atât numărătorul precum şi numitorul cu 1, numărul reprezentat de fracţia obţinută este cu 10% mai mare decât numărul reprezentat de fracţia iniţială.

***

SOLUȚIE PR. NR. 2

Fie $\frac{x}{y}$ o fracţie care verifică ipoteza. Atunci $\frac{x+1}{y+1}=\frac{11x}{10y}$.	**1p**
Ultima relaţie este echivalentă cu $(10-x)(11+y)=110$	**2p**
Cum $110=1\cdot 110=2\cdot 55=5\cdot 22$, iar $0<10-x<10$, obţinem soluţiile $\frac{x}{y}\in\left\{\frac{8}{44},\frac{5}{11},\frac{9}{99}\right\}$	**4p**

Problema nr. 3

Se consideră un dreptunghi $ABCD$ şi un punct M în interiorul său. Perpendiculara în A pe dreapta MA intersectează perpendiculara în B pe dreapta MB în punctul P şi perpendiculara în D pe dreapta MD în punctul Q. Perpendiculara în C pe dreapta MC intersectează perpendiculara în B pe dreapta MB în punctul S şi perpendiculara în D pe dreapta MD în punctul R. Arătaţi că:

a) $PR\perp QS$;

b) $MP+MQ+MR+MS\geq P_{ABCD}$, unde P_{ABCD} reprezintă perimetrul dreptunghiului $ABCD$. Când se obţine egalitatea?

***

SOLUȚIE PR. NR. 3

a) Fie E mijlocul segmentului $[MP]$ și F mijlocul segmentului $[MR]$. Cum segmentele $[AE]$ și $[BE]$ sunt mediane corespunzătoare ipotenuzei $[MP]$ în triunghiurile dreptunghice PAM și respectiv PBM, rezultă că $EA = EB = \frac{MP}{2}$, deci punctul E este situat pe mediatoarea segmentului $[AB]$. Dacă F este mijlocul segmentului $[MR]$, raționând analog, obținem că punctul F este situat pe mediatoarea segmentului $[CD]$. Deoarece $ABCD$ este dreptunghi, mediatoarele segmentelor $[AB]$ și $[CD]$ coincid. Deducem că dreapta EF este perpendiculară pe AB. Deoarece $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul PMR, rezultă că $EF \parallel PR$, deci $PR \perp AB$. Judecând asemănător, considerând mijloacele G și H ale segmentelor $[MQ]$ și $[MS]$, obținem că $SQ \perp BC$. Cum $AB \perp BC$, rezultă concluzia.	**2p** **2p** **1p**
b) Aplicând inegalitatea triunghiului în triunghiurile EAB, HAD, FDC și GBC, obținem $EA + EB \geq AB$, $HA + HD \geq AD$, $FD + FC \geq DC$ și $GC + GB \geq BC$. Însumând relațiile, deducem concluzia. Egalitatea are loc când $ABCD$ este pătrat, iar M este centrul său.	**2p**

Problema nr. 4(MAI MULTE SETURI DE SOLUȚII)

Găsește toate perechile de numere naturale nenule $(n,\ m)$ cu proprietatea $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}$.

Adriana Constantin, Călărași

SOLUȚIE PR. NR. 4

dacă $n = m \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow n = m = 50$; dacă $n \neq m$ putem presupune $n < m$; presupunem $n \geq 50 \Rightarrow m > 50 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{25}$, fals $\Rightarrow n < 50 \leq m$; $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow (n-25)(m-25) = 5^4 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} n-25=1 \\ m-25=5^4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} n-25=5 \\ m-25=5^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=26 \\ m=650 \end{cases}$ sau $\begin{cases} n=30 \\ m=150 \end{cases}$; perechile de numere naturale nenule $(n,\ m)$ cu proprietatea $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}$, sunt: $(50,\ 50)$, $(26,\ 650)$, $(650,\ 26)$, $(30,\ 150)$, $(150,\ 30)$.

Problema nr. 5

Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a > b \geq 3$, $a + b \mid ab + 1$ și $a - b \mid ab - 1$, arătați că $a^2 \leq 2(b^2 - 1)$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

SOLUȚIE PR. NR. 5

Demonstrație: $\left.\begin{array}{l} d' \mid a \\ d' \mid b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d' \mid a+b \\ d' \mid ab \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d' \mid ab+1 \\ d' \mid ab \end{array}\right\} \Rightarrow d' \mid 1 \Rightarrow (a,\ b) = 1$; $\left.\begin{array}{l} d \mid a+b \\ d \mid a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \mid 2a \\ d \mid 2b \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} d \mid 2a \\ d \mid 2b \\ (a,\ b) = 1 \\ d \text{ impar} \end{array}\right\} \Rightarrow (a-b,\ a+b) = 1 \ (1); \quad \left.\begin{array}{r} a+b \mid (a+b)b \\ a+b \mid ab+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b \mid (a+b)b - (ab+1) \Rightarrow a+b \mid b^2 - 1 \ (2);$$

$$\left.\begin{array}{r} a-b \mid ab-1 \\ a-b \mid (a-b)b \end{array}\right\} \Rightarrow a-b \mid (ab-1) - b(a-b) \Rightarrow a-b \mid b^2 - 1 \ (3);\ \text{din } (1),\ (2) \text{ și } (3) \Rightarrow a^2 - b^2 \mid b^2 - 1 \text{ și}$$

$b^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 \leq b^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 + 1 \leq 2b^2 \ (4)$; $a^2 + 1$ impar, $2b^2$ par si $(4) \Rightarrow a^2 + 2 \leq 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 2(b^2 - 1)$.

Problema nr. 6

Fie $ABCD$ un paralelogram care are măsura unghiului A egală cu 60°. Dacă bisectoarea unghiului B intersectează diagonala AC în punctul M și latura DC în punctul N, bisectoarea unghiului D intersectează diagonala AC în punctul P și latura AB în punctul Q iar patrulaterul $BNDQ$ este romb arătați că $AC = 3MP$.

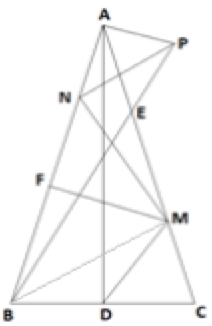
SOLUȚIE PR. NR. 6

Indicație: M este centrul de greutate al triunghiului ΔBCD și P este centrul de greutate al triunghiului ΔABD

Problema nr. 7

Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și $m(ACB) = 75^0$. În interiorul unghiului ABC se consideră semidreptele $[BE$ și $[BM$ astfel încât $m(ABE) = 15^0$ și $m(MBC) = 30^0$, $E, M \in (AC)$. Perpendiculara în M pe BM intersectează AB în N. Dacă D este mijlocul laturii $[BC]$ și P este piciorul perpendicularei din A pe BE, demonstrați că $MD = NP$.

SOLUȚIE PR. NR. 7



$m(ABM) = 75^0 - 30^0 = 45^0 \Rightarrow \triangle BMN$ - dreptunghic și isoscel. Ducem

$MF \perp BN, F \in (BN) \Rightarrow MF = \dfrac{BN}{2}$

$m(BAC) = 180^0 - 2 \cdot 75^0 = 30^0 \Rightarrow MF = \dfrac{AM}{2}$ din $\triangle$ dreptunghic AFM. Deci

$BN = AM \Rightarrow AN = MC \quad (1)$

$m(BEC) = 45^0 \Rightarrow m(AEP) = m(EAP) = 45^0$

$\triangle ABD \equiv \triangle BAP\,(IU) \Rightarrow BD = AP \Rightarrow DC = AP \qquad (2)$

$m(NAP) = 30^0 + 45^0 = 75^0 \Rightarrow m(NAP) = m(MCD) \quad (3)$

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \Delta NAP \equiv \Delta MCD \Rightarrow MD = NP$

Problema nr. 8 (DUBLĂ IMPLICAȚIE)

Fie ABC un triunghi, d_1 simetrica dreptei BC față de dreapta BA și d_2 simetrica dreptei CB față de dreapta CA. O dreaptă care trece prin punctul A și nu intersectează segmentul $[BC]$, intersectează dreapta d_1 în punctul M și dreapta d_2 în punctul N. Să se arate că $BM + CN = BC$ dacă și numai dacă $m(BAC) = 90^0$.

SOLUȚIE PR. NR. 8

" $\Leftarrow$ " Dacă $\widehat{BAC} = 90^\circ$ simetricul lui M față de AB este un punct $M' \in BC$ astfel ca $BM = BM'$.

Pe de altă parte $\widehat{MAB} = \widehat{BAM'}$, $\widehat{M'AC} = 90^\circ - \widehat{BAM'}$ și

$$\widehat{MAC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{MAB} = 90^\circ - \widehat{MAB},$$

astfel că $\widehat{NAC} = \widehat{M'AC}$ și $\triangle ACN \equiv \triangle ACM'$, deci $CM' = CN$.

În concluzie $BM + CN = BM' + CM' = BC$.

" $\Rightarrow$ " Dacă $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$ atunci $\widehat{M'AC} \neq \widehat{NAC}$ și dacă $\widehat{M'AC} < \widehat{MAC}$ atunci $M'C < NC$ și $MB + NC > BC$ dacă $\widehat{M'AC} > \widehat{NAC}$ atunci $M'C > NC$ și $MB + NC < BC$.

Problema nr. 9

Să se determine numerele naturale n, știind că $a_n = 15^n + 17^n + 4$ este pătrat perfect.

Dan Popescu, Suceava

SOLUȚIE PR. NR. 9

Dacă $n \geq 2 \Rightarrow 15^n \vdots 9$, iar $17^n = M_9 + (-1)^n$. Astfel, pentru $n \geq 2, a_n$ este de forma $9a+3, a \in \mathbb{N}^*$ sau $9b+5, b \in \mathbb{N}^*$, ceea ce arată că a_n nu este pătrat perfect.

Astfel, $a_1 = 36$ este singura posibilitate.

Barem:

$n \geq 2 \Rightarrow 15^n \vdots 9$, iar $17^n = M_9 + (-1)^n$.	3p
$n \geq 2, a_n$ este de forma $9a+3, a \in \mathbb{N}^*$ sau $9b+5, b \in \mathbb{N}^*$, a_n nu este pătrat perfect	3p
$a_1 = 36$ este singura posibilitate	1p

Problema nr. 10

Fie numerele reale pozitive a,b,c,d astfel încât $a+b=c+d$ și $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$.

Arătați că $ab = cd$ și $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$.

SOLUȚIE PR. NR. 10

Relația $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$ se scrie astfel: $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2d^2}$ (1). Observăm că egalitatea $a+b=c+d$ conduce, prin ridicare la pătrat la $a^2+b^2-(c^2+d^2)=2(cd-ab)$.

Presupunem că $ab \neq cd$. Folosind proprietățile proporțiilor derivate obținem:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2d^2}=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{a^2b^2-c^2d^2}=\frac{2(cd-ab)}{(ab-cd)(ab+cd)}=\frac{-2}{ab+cd}<0,$$

ceea ce este fals. Contradicția la care am ajuns arată că $ab = cd$ și $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{c^2+d^2}{cd}$, de unde avem $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$.

Barem:

Determină relația (1)	1p
$a+b=c+d \Rightarrow a^2+b^2-(c^2+d^2)=2(cd-ab)$	2p
Demonstrează că $ab \neq cd$ duce la o contradicție	3p
Finalizare	1p

Problema nr. 11

a). Să se calculeze:

$$A=\frac{4-2}{3\cdot 1}+\frac{6-4}{5\cdot 3}+\frac{8-6}{7\cdot 5}+\cdots+\frac{2016-2014}{2015\cdot 2013}.$$

b). Determinaţi cel mai mic număr întreg care este mai mare decât *x*, unde

$$x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{12}+\sqrt{16}+\sqrt{20}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

SOLUȚIE PR. NR. 11

a) $A=\frac{2}{3\cdot 1}+\frac{2}{5\cdot 3}+\frac{2}{7\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{2015\cdot 2013}$ .... **1 p**

$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}$ .... **2 p**

$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$ .... **1 p**

b). $x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{12}+\sqrt{16}+\sqrt{20}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)+2\cdot\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\sqrt{2}+2$ .... **1 p**

Scrierea relaţiei $1<\sqrt{2}<2\Leftrightarrow 3<\sqrt{2}+2<4$ .... **1 p**

Concluzia: cel mai mic număr natural mai mare decât x este 4 .... **1 p**

Problema nr. 12

Fie numerele $a_1=\sqrt{1}$, $a_2=\sqrt{3+5}$, $a_3=\sqrt{7+9+11}$,

$a_4=\sqrt{13+15+17+19}$, ...

a). Calculaţi a_9.

b). Câte numere $a_k, k\in N^*, k\le 2015$, sunt numere iraţionale.

SOLUTIE Problema nr. 12

a) se observă că: $a_1=\sqrt{1}=\sqrt{1^3}=1\cdot\sqrt{1}$

$a_2=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\cdot\sqrt{2}$; $a_3=\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3\cdot\sqrt{3}$; $a_4=\sqrt{64}=\sqrt{4^3}=4\cdot\sqrt{4}$; ...

în general numerele au forma $a_k=\sqrt{k^3}=k\cdot\sqrt{k}$ .... **2 p**

deci $a_9=9\cdot\sqrt{9}=27$ .... **1 p**

b). Pentru a afla numărul numerelor iraţionale scădem din 2015 numărul de numere raţionale. Pentru ca $a_k\in Q$ trebuie să avem k pătrat perfect ...... **1 p**

Cel mai mare pătrat perfect mai mic decât 2015 este $1936=44^2$, deci $1^2\cdot\sqrt{1^2}$, $2^2\cdot\sqrt{2^2}$, $3^2\cdot\sqrt{3^2}$, ..., $44^2\cdot\sqrt{44^2}$ sunt numere raţionale, deci avem 44 numere raţionale .... **2 p**

Dacă sunt 44 numere raţionale, atunci $2015-44=1971$ sunt numere iraţionale . . **1 p**

Problema nr. 13

În paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 2 \cdot BC$, se construieşte $[AM$ bisectoarea $\angle DAB$, $M \in [DC]$. Perpendiculara în A pe AM intersectează BC în N. Dacă $MN \cap AB = \{P\}$, aflaţi valoarea raportului $\frac{AP}{PB}$.

SOLUTIE Problema nr. 13

$[AM$ bisectoarea $\angle DAB \Rightarrow \angle DAM \equiv \angle MAB$; dar $\angle MAB \equiv \angle AMD$ (alterne interne) $\Rightarrow \Delta ADM$ isoscel de bază $[AM] \Rightarrow AD=DM$; dar $AD = BC = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} \Rightarrow$ M este mijlocul laturii $[DC]$ . . . . **1 p**

deoarece $[AM$ bisectoarea $\angle DAB$ şi $AN \perp AM \Rightarrow [AN$ bisectoarea $\angle EAB$, unde $A \in (DE) \Rightarrow \angle EAN \equiv \angle NAB$ . . . . **1 p**

din $\angle EAN \equiv \angle ANB$ (corespondente) $\Rightarrow \angle NAB \equiv \angle ANB \Rightarrow AB=BN$ . . **1 p**

În ΔNMC avem $PB \| MC \Rightarrow$ (cf. T.F.A.) $\Delta NPB \sim \Delta NMC \Rightarrow \frac{PB}{MC} = \frac{NB}{NC}$ . . **1 p**

Cum $MC = \frac{AB}{2} = BC$ şi $NB = AB = 2 \cdot BC$ găsim

$NC = NB + BC = 2 \cdot BC + BC = 3 \cdot BC \Rightarrow \frac{PB}{BC} = \frac{2 \cdot BC}{3 \cdot BC} \Rightarrow PB = \frac{2 \cdot BC}{3}$ . . **1 p**

Deci $AP = AB - PB = 2 \cdot BC - \frac{2 \cdot BC}{3} = \frac{4 \cdot BC}{3}$ . . . . **1 p**

Adică $\frac{AP}{PB} = \frac{4 \cdot BC}{3} \cdot \frac{3}{2 \cdot BC} = 2$ . . . . **1 p**

Problema nr. 14

În triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^{o}$ şi $m(\angle C)=30^{o}$ considerăm bisectoarea $[BE,\ E\in[AC]$ şi un punct *D* pe $[BC]$ astfel încât $BC=3\cdot BD$. Dacă $\{O\}=BE\cap AD$ şi *F* este mijlocul lui $[AB]$, arătaţi că *F*, *O* şi *C* sunt coliniare.

SOLUTIE Problema nr. 14

Deoarece $\{O\}=BE\cap AD$ vom arăta că $O\in CF$ arătând că dreptele *AD*, *BE* şi *CF* sunt concurente folosind reciproca teoremei lui Ceva.

Arătăm că $\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$.

Deoarece *F* este mijlocul lui $[AB]\Rightarrow BF=FA\Rightarrow\frac{BF}{FA}=1$ . . . . **1 p**

Cum $[BE$ este bisectoare $\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$ . . . . **2 p**

Din ΔABC cu $m(\angle A)=90^{o}$ şi $m(\angle C)=30^{o}$ $\Rightarrow AB=\frac{BC}{2}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$,

deci $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$ . . . . **1 p**

Din ipoteză $BC=3\cdot BD\Rightarrow DC=BC-BD=2\cdot BD$ deci $\frac{CD}{DB}=2$ . . . . **1 p**

Aşadar, $\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=1$, deci dreptele *AD*, *BE*, *CF* sunt concurente, şi deci punctele *C*, *O*, *F* coliniare . . . . **2 p**

MULT SUCCES!