XIII. NUMERE RAŢIONALE POZITIVE

Mulţimea numerelor raţionale pozitive $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in N, b \in N^* \right\}$

Numărul a se numeşte numărător, iar b se numeşte numitor.

Orice număr raţional are două reprezentări echivalente: sub formă de fracţie ordinară şi sub formă de fracţie zecimală (cu virgulă), astfel:

- *dacă numitorul unei fracţii ordinare se descompune în produs de factori primi de forma* $2^m \cdot 5^n$ *(m,n* ϵ **N***), atunci fracţia ordinară se poate transforma într-o fracţie zecimală exactă (cu un număr finit de zecimale nenule);*
- *dacă numitorul unei fracţii ordinare se descompune în produs de factori primi, atunci fracţia ordinară se poate transforma într-o fracţie zecimală periodică simplă;*
- *dacă numitorul unei fracţii ordinare se descompune în produs de factori 2 sau 5, sau 2 şi 5,cu alţi factori primi, atunci fracţia ordinară se poate transforma într-o fracţie zecimală periodică mixtă.*

Fracţiile se clasifică astfel: subunitare (dacă $m < n$*), echiunitare (dacă* $m = n$*) şi supraunitare (dacă* $m > n$*).*

O fracţie $\frac{m}{n}$ *se numeşte ireductibilă, dacă* $c.m.m.d.c.(m,n) = 1$.

Exemplu: fracţia $\frac{6n+4}{5n+3}$ *este ireductibilă deoarece dacă d este un divizor comun al numerelor 6n+4 şi 5n+3. Atunci* $d \mid \left[(6n+4) - (5n+3) \right] \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$ *numărătorul şi numitorul sunt numere prime între ele* $\Rightarrow$ *fracţia dată este ireductibilă.*

Dacă $c.m.m.d.c.(m,n) \neq 1$*, atunci fracţia se numeşte reductibilă.*

Exemplu: pentru ce valori naturale alelui n, fracţia $\frac{2n+3}{5n+1}$ *este reductibilă?*

Fie d un divizor comun al numerelor $2n+3$ *şi* $5n+1$*. Atunci* $d \mid (2n+3)$ *şi* $d \mid (5n+1) \Rightarrow$ *şi* $d \mid 2 \cdot (5n+1)$*. Prin urmare* $\left[5 \cdot (2n+3) - 2 \cdot (5n+1) \right] \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d = 13$*, dat fiind că 13 este număr prim* $13 \mid (2n+3)$ *şi* $13 \mid (5n+1)$ $\Rightarrow 13 \mid \left[3(2n+3) - (5n+1) \right] \Rightarrow 13 \mid (n+8) \Rightarrow n+8 = 13 \cdot m \Rightarrow$ $n = 13 \cdot m - 8 = 13 \cdot m - (13-5) = 13 \cdot (m-1) + 5$ $\Rightarrow n = 13 \cdot k + 5 \; k \in N$*. Deci fracţia este reductibilă pentru* $n \in \{ 13 \cdot k + 5 \mid k \in N \}$.

Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale

O fracţie ordinară se poate transforma în fracţie zecimală folosind algoritmul împărţirii numerelor naturale. Astfel, orice număr raţional, $\frac{m}{n}$*, unde* $m \in N$*,* $n \in N^*$ *poate fi reprezentat sub forma* $\frac{m}{n} = \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$*, unde* $a_0 \in N$ *iar* $a_1, a_2, \ldots$ *sunt cifre.*

Numărul natural a_0 *se numeşte partea întreagă a lui* $\frac{m}{n}$*, iar fracţia zecimală* $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$ *se numeşte partea fracţionară a numărului raţional* $\frac{m}{n}$.

Transformarea unei fracţii zecimale în fracţie ordinară

1) Dacă $a_0 \in N$ iar $a_1, a_2, ..., a_p$ sunt cifre, atunci $\overline{a_0, a_1a_2...a_p} = a_0 \dfrac{\overline{a_1a_2...a_p}}{10^p}$.

2) Dacă $a_0 \in N$ iar $a_1, a_2, ..., a_p$ sunt cifre, atunci $\overline{a_0, (a_1a_2...a_p)} = a_0 \dfrac{\overline{a_1a_2...a_p}}{\underbrace{99...9}_{p\ cifre}}$

Probleme rezolvate

1. Fie *a*, *b*, *c* cifre nenule distincte şi $A = \overline{0,ab} + \overline{0,bc} + \overline{0,ca}$.
a) Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a lui A şi cea mai mare valoare posibilă a lui A.
b) Dacă $a + b + c = 12$, determinaţi cel mai mic număr natural nenul n, astfel încât $n \cdot A \in \mathbf{N}$.
(Dâmboviţa, et. locală)

Rezolvare:

a) Observăm că putem scrie: $A = \overline{0,ab} + \overline{0,bc} + \overline{0,ca} = \dfrac{\overline{ab}}{100} + \dfrac{\overline{bc}}{100} + \dfrac{\overline{ca}}{100} = \dfrac{10a + b + 10b + c + 10c + a}{100} =$ $\dfrac{11 \cdot (a + b + c)}{100}$. Cea mai mică valoare se obţine dacă $\{a,b,c\} = \{1,2,3\}$, când obţinem $A = \dfrac{11 \cdot 6}{100} = 0,66$.

Cea mai mare valoare se obţine pentru $\{a,b,c\} = \{7,8,9\}$, deci este $A = \dfrac{11 \cdot 24}{100} = 2,64$.

b) Dacă $a + b + c = 12$, atunci $A = \dfrac{11 \cdot 12}{100} = \dfrac{11 \cdot 3}{25}$, iar $n \cdot A \in \mathbf{N} \Rightarrow n \cdot \dfrac{11 \cdot 3}{25} \in \mathbf{N}$ şi cea mai mică valoare nenulă a lui n este 25.

2. Se consideră şirul de fracţii $\dfrac{9}{14}, \dfrac{10}{21}, \dfrac{11}{28}, \dfrac{12}{35}, ...$
a) Ordonaţi crescător primele trei fracţii.
b) Notăm cu x_1 prima fracţie, cu x_2 cea de-a doua fracţie, cu x_3 pe a treia etc. Găsiţi x_{2007} (a 2007-a fracţie din şir).
c) Arătaţi că $x_n > \dfrac{1}{7}$, pentru orice *n* număr natural nenul. (Iaşi, et. judeţeană)

Rezolvare:

a) Observăm că $\dfrac{11}{28} < \dfrac{10}{21}$ deoarece dacă amplificăm convenabil fracţiile obţinem două fracţii cu acelaşi numitor şi comparăm numărătorii $\dfrac{33}{84} < \dfrac{40}{84}$, analog $\dfrac{10}{21} < \dfrac{9}{14}$, deci $\dfrac{11}{28} < \dfrac{10}{21} < \dfrac{9}{14}$,

b) $x_1 = \dfrac{7+2}{7 \cdot 2}; x_2 = \dfrac{7+3}{7 \cdot 3}; x_3 = \dfrac{7+4}{7 \cdot 4} \Rightarrow x_{2007} = \dfrac{7+2008}{7 \cdot 2008} = \dfrac{2015}{14056}$,

c) $x_n = \dfrac{7+n+1}{7 \cdot (n+1)} \Rightarrow \dfrac{8+n}{7(n+1)} = \dfrac{(n+1)+7}{7(n+1)} > \dfrac{1}{7}$.

3. Se dă fracţia $F = \dfrac{372372...372379}{496496...496505}$ în care 372 şi 496 se repetă de acelaşi număr de ori. Arătaţi că fracţia F este ireductibilă. (Gazeta matematică, seria B)

Rezolvare:

Se consideră că 372 şi 496 se repetă de n ori.

F=$\dfrac{372\cdot 10^{n-3}+372\cdot 10^{n-6}+...+372\cdot 10^{3}+379}{496\cdot 10^{n-3}+496\cdot 10^{n-6}+...+496\cdot 10^{3}+505}\Rightarrow$F=$\dfrac{372\cdot(10^{n-3}+10^{n-6}+...+10^{3})+379}{496\cdot(10^{n-3}+10^{n-6}+...+10^{3})+505}$

Notăm a=$10^{n-3}+10^{n-6}+...+10^{3}\Rightarrow$F=$\dfrac{372\cdot a+379}{496\cdot a+505}$. Fie d este cel mai mare divizor comun pentru $372\cdot a+379$ şi $496\cdot a+505\Rightarrow$ d$|372\cdot a+7\Rightarrow$ d$|4(372\cdot a+7)\Rightarrow$ d$|496\cdot a+9\Rightarrow$ d$|3(496\cdot a+9)$
d$|496\cdot a+9\Rightarrow$ d$|3(496\cdot a+9)\Rightarrow$d$|4(372\cdot a+7)-3(496\cdot a+9)\Rightarrow$d$|1488\cdot a+28-1488\cdot a-27\Rightarrow$ d$|1$
$\Rightarrow$ d = 1, deci F este ireductibilă.

4. Scrieţi în ordine crescătoare numerele raţionale: $\dfrac{11}{24},\dfrac{13}{40},\dfrac{15}{56},\dfrac{17}{72},...,\dfrac{2005}{15976}$.(Buzău, et. judeţeană)

Rezolvare:

Observăm că există o legătură între numărători şi numărători şi anume: $11=3+8$; $24=3\cdot 8$; $13=5+8$; $40=5\cdot 8$; ... $2005=8+1997$; $15976=8\cdot 1997\Rightarrow\dfrac{11}{24}=\dfrac{3+8}{3\cdot 8}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{13}{40}=\dfrac{5+8}{5\cdot 8}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{5}$ $\dfrac{15}{56}=\dfrac{7+8}{7\cdot 8}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7}$; $\dfrac{17}{72}=\dfrac{9+8}{9\cdot 8}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}$;... $\dfrac{2005}{15976}=\dfrac{1997+8}{1997\cdot 8}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{1997}$.Deoarece $\dfrac{1}{1997}<\dfrac{1}{1995}<...<\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{3}$, rezultă că ordinea crescătoare a numerelor este: $\dfrac{2005}{15976}<\dfrac{2003}{15960}<...<\dfrac{15}{56}<\dfrac{13}{40}<\dfrac{11}{24}$.

5. Să se arate că numărul $a=\dfrac{36}{5\cdot 7}-\dfrac{1}{5\cdot 6\cdot 7}-\dfrac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\dfrac{1}{6\cdot 8}$ este natural. (Bucureşti, et. judeţeană)

Rezolvare:

$$a=\frac{36}{5\cdot 7}-\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{6\cdot 8}=1+\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{6\cdot 8}=1+\left(\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}\right)-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}$$
$$-\frac{1}{6\cdot 8}=1+\frac{6-1}{5\cdot 6\cdot 7}-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{6\cdot 8}=1+\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{6\cdot 8}=1+\left(\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}\right)-\frac{1}{6\cdot 8}=$$
$$=1+\frac{8-1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{6\cdot 8}=1+\frac{1}{6\cdot 8}-\frac{1}{6\cdot 8}=1$$

6. Câte numere naturale conţine mulţimea: $\left\{\dfrac{2001}{2},\dfrac{2002}{3},\dfrac{2003}{4},...\right\}$? (Cluj, et. judeţeană)

Rezolvare:

Observăm că: $\dfrac{2001}{2}=\dfrac{1999+2}{2}=\dfrac{1999}{2}+1$, $\dfrac{2002}{3}=\dfrac{1999+3}{3}=\dfrac{1999}{3}+1$, $\dfrac{2003}{4}=\dfrac{1999+4}{4}=\dfrac{1999}{4}+1$,

Deci forma generală a elementelor mulţimii este: $\dfrac{1999+n}{n}=\dfrac{1999}{n}+1$, unde $n\geq 2$, dar 1999 este număr prim de unde rezultă că mulţimea dată conţine un singur număr natural, care se obţine pentru $n=1999$ şi anume $\dfrac{1999}{n}+1=\dfrac{1999}{1999}+1=2$.

7. Demonstraţi că $\dfrac{25}{2\cdot 7}+\dfrac{25}{7\cdot 12}+\dfrac{25}{12\cdot 17}+...+\dfrac{25}{47\cdot 52}<\dfrac{5}{2}$. (Argeş, et. judeţeană)

Rezolvare:

$\dfrac{5}{2\cdot 7}=\dfrac{7-2}{2\cdot 7}=\dfrac{7}{2\cdot 7}-\dfrac{2}{2\cdot 7}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}\Rightarrow\dfrac{5}{2\cdot 7}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}$; $\dfrac{5}{7\cdot 12}=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{12}$; $\dfrac{5}{12\cdot 17}=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{17}$;... $\dfrac{5}{47\cdot 52}=\dfrac{1}{47}-\dfrac{1}{52}$

Adunând membru cu membru obţinem: $\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+...+\frac{5}{47\cdot 52}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{12}\right)$

$+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{17}\right)+...+\left(\frac{1}{47}-\frac{1}{52}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+...+\frac{1}{47}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+...+\frac{1}{47}+\frac{1}{52}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{52}$

$\frac{50}{2\cdot 52}=\frac{25}{52}$ $\quad\frac{25}{2\cdot 7}+\frac{25}{7\cdot 12}+\frac{25}{12\cdot 17}+...+\frac{25}{47\cdot 52}=5\cdot\left(\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+...+\frac{5}{47\cdot 52}\right)=5\cdot\frac{25}{52}=\frac{125}{52}$

Demonstrăm că $\frac{125}{52}<\frac{5}{2}$, deoarece $2\cdot 125=250<260=5\cdot 52$.

8. Să se arate că: $\frac{1+321^{123}}{1+123^{321}}<\frac{2+3^{9119}}{2+71^{1991}}$. (Buzău, et. locală)

Rezolvare:

$123^{321}=(3\cdot 41)^{321}>3^{321}\cdot 41^{246}>3^{321}\cdot\left(41^{2}\right)^{123}>3^{123}\cdot\left(41^{2}\right)^{123}>3^{123}\cdot 107^{123}=321^{123}\Rightarrow$

$1+321^{123}<1+123^{321}\Rightarrow\frac{1+321^{123}}{1+123^{321}}<1$

Analog $3^{9119}>3^{7964}=3^{4\cdot 1991}=81^{1991}>71^{1991}\Rightarrow 3^{9191}>71^{1991}\Rightarrow\frac{2+3^{9119}}{2+71^{1991}}>1$

9. Fie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{35}=\frac{a}{b}$, unde $a,b\in\mathbf{N}$. Să se arate că $a-b$ este divizibil cu 37. (Arad et. judeţeană)

Rezolvare:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{35}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{35}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{34}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{33}\right)+...+\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{19}\right)$

$\frac{a}{b}-1=\frac{2+35}{2\cdot 35}+\frac{3+34}{3\cdot 34}+...+\frac{18+19}{18\cdot 19}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=37\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 35}+\frac{1}{3\cdot 34}+...+\frac{1}{18\cdot 19}\right)$.

Notăm $\frac{1}{2\cdot 35}+\frac{1}{3\cdot 34}+...+\frac{1}{18\cdot 19}=\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=37\cdot\frac{m}{n}$ şi 37 nu divide n=[2, 3, 4, 5,…, 34, 35]$\Rightarrow$ $37\cdot b\cdot m=n\cdot(a-b)\Rightarrow a-b$ este divizibil cu 37.

10. Pentru fiecare $n\geq 3$ să se găsească *n* numere naturale distincte astfel ca suma inverselor lor să fie 1.

Rezolvare:

Folosind relaţia $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}$, deducem: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n}=1$. Cele n numere sunt: $1\cdot 2=2, 2\cdot 3=6, 3\cdot 4=12, 4\cdot 5=20$, …, $(n-1)\cdot n=n^{2}-n$ şi n.

Probleme propuse

1. Calculaţi suma: $S=\frac{201}{2}+\frac{601}{6}+\frac{1201}{12}+\frac{2001}{20}+...+\frac{9001}{90}$ (Mehedinţi, et. locală)

2. Aflaţi cea mai mare şi cea mai mică fracţie de forma $\frac{\overline{3a7b}}{\overline{1x6y}}$ care se simplifică prin 45. (Vrancea, et. locală)
3. Într-un autocar, numărul locurilor neocupate reprezintă a 9-a parte din numărul locurilor ocupate. Dacă s-ar mai fi ocupat încă un loc, atunci a 15-a parte din numărul total de locuri ar fi fost neocupate. Să se afle numărul de locuri din autocar. (Bucureşti, et. judeţeană)
4. a) Calculaţi suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\frac{1}{2+4+6+8}$ şi scrieţi rezultatul sub formă de fracţie ireductibilă.
b) Arătaţi că:
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\ldots+\frac{1}{2+4+6+\ldots+4024}\right)=\frac{1}{2013}$$
(Teleorman, et. locală)
5. Aflaţi numărul natural a de trei cifre, ştiind că S·a, este număr natural, unde
S= $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{15}{106\cdot 121}$.

Soluţii probleme propuse
1. Dacă scoatem întregii din fiecare fracţie, obţinem:
$$S=\left(100+\frac{1}{2}\right)+\left(100+\frac{1}{6}\right)+\left(100+\frac{1}{12}\right)+\left(100+\frac{1}{20}\right)+\ldots+\left(100+\frac{1}{90}\right)=$$
$$=\left(100+\frac{1}{1\cdot 2}\right)+\left(100+\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(100+\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(100+\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\ldots+\left(100+\frac{1}{9\cdot 10}\right)$$
$$S=900+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=900+\frac{1}{1}-\frac{1}{10}=900+\frac{9}{10}=900,9$$
2. $5\cdot 9=45,(5,9)=1\Rightarrow$ numărătorul şi numitorul trebuie să se dividă cu 5 şi cu 9**.** Pentru numărător se obţin valorile 3870 şi 3375, iar pentru numitor 1260 şi 1665**.** Asta înseamnă că, cea mai mare fracţie este $\frac{3870}{1260}$, iar cea mai mică este $\frac{3375}{1665}$**;** 3. Constatăm că numărul locurilor neocupate reprezintă a 10-a parte din numărul total de locuri. Locul care s-ar mai ocupa reprezintă $\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{3-2}{30}=\frac{1}{30}$ din numărul total de locuri. Prin urmare, numărul de locuri din autocar este 30; 4. a) După efectuarea calculelor S=$\frac{4}{5}$,

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+...+\frac{1}{2+4+6+...+2n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. Observăm că

$n=1\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$n=2\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}=\frac{2}{3}$

....

$n=2012\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+...+\frac{1}{2+4+6+...+4024}=\frac{2012}{2013}$

5. Pentru $S\cdot a\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow a\in M_{121}$ şi cum *a* este de trei cifre, avem $a\in\{121, 242, 263, 484, 605, 726, 847, 968\}$

Fişă de activitate

1. Se ştie că fracţia $\frac{3n+2}{7n+3}$, cu n număr natural impar, este reductibilă. Aflaţi ultima cifră a numărului n. (Gazeta matematică, seria B)

2. a) Aflaţi cifrele nenule x, y astfel încât $\overline{0,x(y)}+\overline{0,y(x)}$ să fie pătratul unui număr raţional.

b) Fără a efectua împărţirea aflaţi câte cifre are perioada şi câte cifre are partea neperiodică pentru fracţia $\frac{1}{12}$. (Argeş, et. judeţeană)

3. Să se arate că fracţia $\frac{a+1}{2a+1}$ este ireductibilă, unde a este număr natural. (Arad, et. judeţeană)

4. Să se determine mulţimea: A= $\left\{x\in N \mid x\neq 0, \frac{18}{n^2+n}\in N\right\}$

5. Determinaţi numărul $\overline{ab}$ ştiind că are loc relaţia $\frac{\overline{ab}}{b^3}=(a-b)^3$. (Gazeta matematică, seria B)

6. Să se afle $n\in\mathbf{N}$ astfel încât numărul $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008}{3^n}$ să fie număr natural şi să aibă cea mai mică valoare posibilă. (Gazeta matematică, seria B)

7. Comparaţi numerele *x* şi *y*, ştiind că $x, y\in\mathbf{N}^*$ şi $\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}+...+\frac{x+2007}{y+2007}=2008$ (Botoşani, et. judeţeană)

8. Să se arate că fracţia $\dfrac{n^2+3n}{n^2+n+2}$ este reductibilă pentru orice $n \in \mathbf{N}$. (Arad, et. judeţeană)

9. Spunem că un număr de forma $\overline{0,abcde}$ are proprietatea P, dacă cifrele a, b, c, d, e aparţin mulţimi $\{4,6\}$.

a) Arătaţi că soluţia ecuaţiei $x+0,46646=1,1111$ are proprietatea P.

b) Câte numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ au proprietatea P ?

c) Arătaţi că, din oricare 17 numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ are proprietatea P, se pot alege două a căror sumă să fie 1,1111. (Bucureşti, et. judeţeană)

10. Să se arate că există un singur număr natural $p \geq 1$ pentru care $2003 \cdot \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\ldots+\dfrac{1}{4p^2-1}\right) \in \mathbf{N}$ (Concursul Arhimede)

11. Să se transforme în fracţie zecimală: $\dfrac{117117117117117}{225225225225225}$. (Gazeta Matematică, seria B)

12. Demonstraţi inegalitatea: $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\ldots+\dfrac{1}{2006^2}<\dfrac{2005}{2006}$. (Galaţi, et. locală)

13. Fie fracţia $\dfrac{2^{2n}\cdot 25^n\cdot 7^n\cdot 13+2^{2n+8}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^n+28^{n+1}\cdot 25^{n+1}+4^{n+1}\cdot 5^{2n+1}\cdot 7^n}{3^n\cdot 7^{n+2}\cdot 11^{n+1}+21^{n+1}\cdot 11^{n+2}-1067\cdot 231^n}$.

a) Simplificaţi fracţia pentru n=1.

b) Arătaţi că fracţia se poate simplifica cu 2013, $\forall n \in \mathrm{N}$. (Cluj, et. locală)

14. Dacă a+b+c = 4 (unde a, b, c $\in \mathbf{N}$), iar 2a+2b+2c este număr prim, arătaţi că numărul $\dfrac{a\cdot b\cdot c}{2013}$ este natural. (Giurgiu, et. locală)