MINISTERUL EDUCAŢIEI ,CERCETĂRII,TINERETULUI ŞI SPORTULUI

COLEGIUL NAŢIONAL VLAICU VODĂ

Municipiul Curtea de Argeş,

Strada Negru Vodă nr. 131, Judeţul Argeş, cod 115300

Telefon:0248 721553 / Fax: 0248 721389;

E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com

Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

FIȘĂ SIMULARE BAC. MATEMATICĂ CLS a XII-a mate- info +st. Nat
MATERIAL COMPLET 2014 SI 2015

SUBIECTUL I –simulare 2014 mat-inf.

5p	**1.** Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $\frac{1+i}{1-i}=a+ib$ şi $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie cu axele de coordonate a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{\frac{x+2}{2}}+3^{x+1}=36$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conţină cifra 6.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(2,3)$ şi $C(0,-2)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin C la AB.
5p	**6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1+\sin x}{\sin x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

BAREM SUBIECTUL I – 2014 mat-inf

1.	$\frac{1+i}{1-i}=i\Rightarrow a+ib=i$	**3p**
	$a=0,\ b=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_1=2,\ x_2=4\Rightarrow G_f\cap Ox=\{(2,0),(4,0)\}$	**3p**
	$f(0)=8\Rightarrow G_f\cap Oy=\{(0,8)\}$	**2p**
3.	$3^{x+2}+3^{x+1}=36\Leftrightarrow 3^{x+1}=9$	**2p**
	$x+1=2\Leftrightarrow x=1$	**3p**
4.	Sunt 72 de numere naturale de două cifre care nu conţin cifra 6, deci sunt 72 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$	**2p**
5.	$m_{AB}=\frac{1}{3}$, $d\parallel AB\Rightarrow m_d=\frac{1}{3}$, unde d este paralela prin C la AB	**3p**
	$d:y=\frac{1}{3}x-2$	**2p**
6.	$\cos x+\sin x\cos x=\sin x+\sin x\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$	**2p**
	$x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL I –simulare 2014 st. nat

5p	**1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$.
5p	**2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2+4x-5$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3-\sqrt{x^2+3}=x$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(4,0)$ și $C(2,0)$. Determinaţi aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$ pentru orice număr real x.

BAREM SUBIECTUL I – 2014 st. nat

1.	$z=1+i-1-i+1+i-1=$ $=i\Rightarrow \overline{z}=-i$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=-4$ Valoarea maximă a funcției f este $-\dfrac{\Delta}{4a}=-1$	**2p** **3p**
3.	$3-x=\sqrt{x^2+3}\Rightarrow 9-6x+x^2=x^2+3$ $x=1$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Sunt 81 de numere naturale de două cifre care au cifrele distincte, deci sunt 81 de cazuri favorabile Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{81}{90}=\dfrac{9}{10}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$AC=3,\ BC=2$ și $m(\sphericalangle C)=90^\circ$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AC\cdot BC}{2}=3$	**3p** **2p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL II –simulare 2014 mat-inf.

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

b) Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c) Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „$*$" este asociativă și are element neutru.

a) Arătați că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

b) Calculați $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}$.

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$".

BAREM SUBIECTUL II – 2014 mat-inf.

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$	**2p**
b)	$\det(A(-1))=4$	**2p**
	Inversa matricei $A(-1)$ este $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	**3p**
c)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$3ab+6a+6b+12=24\Rightarrow(a+2)(b+2)=8$	**1p**
	Perechile de numere naturale care verifică cerința sunt $(0,2)$ și $(2,0)$	**2p**
2.a)	$3xy-3x-3y+4=3(xy-x-y+1)+1=$	**3p**
	$=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x*1=1*x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}=\left(\frac{1}{1007}*\ldots*\frac{1006}{1007}\right)*\frac{1007}{1007}*\left(\frac{1008}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}\right)=1$	**3p**
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$	**1p**
	$x*x=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3(x-1)^2+1=\frac{4}{3}\Leftrightarrow(x-1)^2=\frac{1}{9}$	**2p**
	$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{4}{3}$	**2p**

SUBIECTUL II –simulare 2014 st. Nat

	1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**a)** Calculați $D(1,0)$.
5p	**b)** Arătați că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$ pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Demonstrați că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.
	2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.
5p	**a)** Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$.
5p	**b)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-x$.
5p	**c)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $H=\{x^{10}\mid x\in\mathbb{Z}_6\}$.

BAREM SUBIECTUL II – 2014 st. nat

1.a)	$D(1,0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0$	**3p**
b)	$D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a-1 & b-1\\ 1 & a^2-1 & b^2-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & b+1\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$D(m,n)=(m-1)(n-1)(n-m)$	**1p**
	m şi n au aceeași paritate $\Rightarrow n-m$ este număr par, deci $D(m,n)$ este par	**2p**
	m şi n au parități diferite $\Rightarrow m-1$ și $n-1$ au parități diferite $\Rightarrow (m-1)(n-1)$ este număr par, deci $D(a,b)$ este par	**2p**
2.a)	$\hat{3}x=\hat{3}$	**2p**
	$x_1=\hat{1},\ x_2=\hat{3},\ x_3=\hat{5}$	**3p**
b)	$\hat{0}^3=\hat{0},\ \hat{1}^3=\hat{1},\ \hat{2}^3=\hat{2},\ \hat{3}^3=\hat{3},\ \hat{4}^3=\hat{4},\ \hat{5}^3=\hat{5}$	**3p**
	Deci $\operatorname{Im} f=\{\hat{0}\}$	**2p**
c)	$x^3=x\Rightarrow x^{10}=x^2$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$	**2p**
	$H=\{x^2\mid x\in\mathbb{Z}_6\}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{3},\hat{4}\}$, deci mulțimea H are 4 elemente	**3p**

SUBIECTUL III –simulare 2014 mat-inf.

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$.
5p	**a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice la graficul funcţiei f.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_1.
5p	**b)** Arătaţi că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

BAREM SUBIECTUL II – 2014 mat-inf

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1\Rightarrow$ dreapta $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p**
b)	$f(2)=6$, $f'(2)=-2$	**3p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=-2x+10$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x+2}{x^2-x}\right)^{\frac{x^2-x}{x+2}}\right]^{\frac{x+2}{x^2-x}\cdot(x+3)}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x}}=e$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}dx=$	**3p**
	$=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\|_0^1=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x+1}dx\le 0$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$2I_{n+1}\le\frac{1}{n+1}\le 2I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\frac{1}{2}\le(n+1)I_n\le\frac{n+1}{2n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$	**1p**

SUBIECTUL III –simulare 2014 st. Nat

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^e (x+1)f(x)\ln x\,dx$.

5p **c)** Arătaţi că $F(e-1)=\frac{e^2-4e+7}{2}$, unde $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f pentru care $F(0)=1$.

BAREM SUBIECTUL III– 2014 st. nat

1.a)	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=1$	**3p**
c)	$x\in(0,1]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\geq f(1)\Rightarrow f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_0^1 (x+1)f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int_1^e (x+1)f(x)\ln x\,dx=\int_1^e x^2\ln x\,dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^3}{3}\cdot\ln x\right)\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{3}dx=\frac{2e^3+1}{9}$	**3p**
c)	$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+\mathcal{C}\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+c$	**3p**
	$F(0)=1\Rightarrow c=1$	**1p**
	$F(e-1)=\frac{e^2-4e+7}{2}$	**1p**

SUBIECTUL I –simulare 2015 mat-inf.

5p	**1.** Calculați partea reală a numărului complex $z=\frac{3+2i}{2-3i}$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-a$ are graficul tangent axei Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}+3\cdot 4^x-16=0$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, aceasta să aibă un singur element număr par.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $N(4,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.
5p	**6.** Arătați că $(\sin x+\sin(\pi-x))^2+(\cos x+\cos(2\pi-x))^2=4$, pentru orice număr real x.

BAREM SUBIECTUL I – 2015 mat-inf

1.	$z=\frac{(2+3i)(3+2i)}{4+9}=\frac{13i}{13}=i$ Partea reală a numărului z este egală cu 0	**3p** **2p**
2.	$\Delta=1+4a$ $1+4a=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$	**2p** **3p**
3.	$4^x+3\cdot 4^x-16=0\Leftrightarrow 4\cdot 4^x=16$ $x=1$	**3p** **2p**
4.	Sunt $C_3^1\cdot C_4^1=12$ cazuri favorabile Sunt $C_7^2=21$ de cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Mediatoarea d trece prin punctul $P(3,2)$, care este mijlocul segmentului MN $m_{MN}=-1\Rightarrow m_d=1$ Ecuația dreptei d este $y=x-1$	**2p** **1p** **2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$ $(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4(\sin^2 x+\cos^2 x)=4$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**

SUBIECTUL I –simulare 2015 st-nat

5p	**1.** Calculați a_{2015}, știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2015$ și $r = -1$.
5p	**2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(2,-3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3,..., 9\}$, aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ și $C(1,2)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că patrulaterul $OABC$ este paralelogram.
5p	**6.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 3\sqrt{3}$ și $BD = 6$. Calculați aria triunghiului ABC.

BAREM SUBIECTUL I – 2015 st-nat

1.	$a_{2015} = 2015 + 2014\cdot(-1) =$ $= 1$	**3p** **2p**
2.	$f(2) = -3 \Leftrightarrow -4m + 5 = -3$ $m = 2$	**3p** **2p**
3.	$x+1-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}+x-1 = 2 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{x^2-1}$ $x = 1$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Sunt 3 pătrate perfecte în mulțime, deci sunt $C_3^2 = 3$ cazuri favorabile Sunt $C_9^2 = 36$ de cazuri posibile $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Diagonalele paralelogramului $OABC$ se înjumătățesc, deci $x_A + x_C = x_O + x_B \Rightarrow x_B = 6$ $y_A + y_C = y_O + y_B \Rightarrow y_B = 0$	**3p** **2p**
6.	$AD = 3$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL II –simulare 2015 mat-inf.

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.
5p	**b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(x)+I_3)=0$.
5p	**c)** Arătaţi că $\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))\ge 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b şi c.
	2. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.
5p	**a)** Arătaţi că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x şi y.
5p	**b)** Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „$*$”.
5p	**c)** Calculaţi $d_1*d_2*\cdots*d_8$, unde $d_1,d_2,\ldots,d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

BAREM SUBIECTUL II - 2015

1.a)	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**
b)	$A(x)+I_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)+I_3)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1+x$	**3p**
	$1+x=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
c)	$aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-b\\-b&0&0\\0&-b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&c&0\\0&0&c\\c&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))=\begin{vmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{vmatrix}=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$	**1p**
	$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\ge 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b şi c	**2p**
2.a)	$x*y=xy-5x-5y+25+5=$	**2p**
	$=x(y-5)-5(y-5)+5=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x şi y	**3p**
b)	Elementul neutru al legii de compoziţie „$*$” este 6	**1p**
	x este simetrizabil dacă există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x*x'=x'*x=6$, de unde $x'=5+\frac{1}{x-5}$	**2p**
	Cum x' este număr întreg, obţinem $x=4$ sau $x=6$	**2p**
c)	$x*5=5$ şi $5*y=5$, pentru x şi y numere întregi	**2p**
	5 este divizor al lui 2015	**1p**
	2015 are 8 divizori naturali şi legea de compoziţie este asociativă, avem $d_1*d_2*\cdots*d_8=5$	**2p**

SUBIECTUL II –simulare 2015 st-nat

	1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1 & x & 4\\ 2 & x-1 & 7-x\\ 1 & -2 & x^2\end{vmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $D(1)$.
5p	**b)** Arătați că $D(x)=-(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D\left(2^x-3\right)=0$.
	2. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+3a & -6a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $X(-1)+X(1)=2X(0)$.
5p	**b)** Arătați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

BAREM SUBIECTUL II – 2015 st-nat

1.a)	$D(1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 6\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0-16+6-0-2+12=0$	**3p**
b)	$D(x)=\begin{vmatrix}1 & x & 4\\ 0 & -1-x & -1-x\\ 0 & -2-x & x^2-4\end{vmatrix}=-(x+1)(x+2)\begin{vmatrix}1 & x & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & x-2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=-(x+1)(x+2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & x-2\end{vmatrix}=-(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\left(2^x-4\right)\left(2^x-2\right)\left(2^x-1\right)=0$	**2p**
	$x_1=0$, $x_2=1$ și $x_3=2$	**3p**
2.a)	$X(-1)=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $X(1)=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $X(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X(-1)+X(1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2X(0)$	**2p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1+3a & -6a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+3b & -6b\\ b & 1-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3a+3b+3ab & -6a-6b-6ab\\ a+b+ab & 1-2a-2b-2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(a+b+ab) & -6(a+b+ab)\\ a+b+ab & 1-2(a+b+ab)\end{pmatrix}=X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det\left(X(a)\right)=1+a$	**2p**
	$\det\left(X(a)\right)=0\Leftrightarrow a=-1$, deci matricea $X(a)$ este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**3p**

SUBIECTUL III –simulare 2015 mat-inf.

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-f(x)-\ln2}{x-1}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\ln(x+1)\le x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.
5p	**a)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1\dfrac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\dfrac{\pi}{8}$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$.

BAREM SUBIECTUL III - 2015

1.a)	$f'(x)=x'-(\ln(x+1))'=$	**2p**
	$=1-\dfrac{1}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-f(x)-\ln2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x+1)-\ln2}{x-1}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}$	**3p**
c)	$f'(0)=0$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,0)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(0)\Rightarrow\ln(x+1)\le x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\ln2$	**2p**
b)	$\int_0^1\dfrac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\int_0^1\dfrac{x}{x^4+1}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2)\Big\|_0^1=\dfrac{\pi}{8}$	**3p**
c)	Din regula lui l\`Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$, limita cerută este egală cu $\lim\limits_{x\to1}\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL III –simulare 2015 st-nat

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.
5p	**a)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$.
5p	**c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^{x+1}-3, & x\le -1\\ 2x^3+(a-3)x-4, & x>-1\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în $x=-1$.
5p	**b)** Arătaţi că $f(x)+2\le 0$, pentru orice $x\le -1$.
5p	**c)** Pentru $a=-1$, arătaţi că ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,2]$.

BAREM SUBIECTUL III – 2015 st-nat

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2}{x-1}=$	**2p**
	$=+\infty$, deci dreapta de ecuaţie $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{(x-1)(x-2)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x-1}=0$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$, deci dreapta de ecuaţie $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p**
2.a)	f este continuă în $x=-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=f(-1)$	**2p**
	$-2=-2-a+3-4 \Leftrightarrow a=-1$	**3p**
b)	$x\le -1 \Rightarrow x+1\le 0 \Rightarrow e^{x+1}\le e^0$	**2p**
	$e^{x+1}-3\le 1-3 \Rightarrow f(x)\le -2 \Rightarrow f(x)+2\le 0$, pentru orice $x\le -1$	**3p**
c)	$f(x)=2x^3-4x-4$, $f(0)=-4$ şi $f(2)=4$	**3p**
	Cum f este continuă pe $[0,2]$ şi $f(0)\cdot f(2)<0$, ecuaţia $f(x)=0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,2]$	**2p**

MULT SUCCES!