MINISTERUL EDUCAŢIEI ,CERCETĂRII,TINERETULUI ŞI SPORTULUI

COLEGIUL NAŢIONAL VLAICU VODĂ

Municipiul Curtea de Argeş,

Strada Negru Vodă nr. 131, Judeţul Argeş, cod 115300

Telefon:0248 721553 / Fax: 0248 721389;

E-mail: cn_vlaicu_voda@yahoo.com

Web: cnvlaicuvoda.licee.edu.ro

FISA NR.1 PREGATIRE OLIMPIADA LOCALA DE MATEMATICA
CLASA A VII-A

PROBLEMA NR. 1 –ONM LOCALA 2015 - ILFOV

Aflaţi numărul $a \in \mathbb{N}$ care verifică relaţia :

$$a^n - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2014}$$ **ştiind că**

$$n = \sqrt{2015} \cdot \sqrt{45 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{4 + \sqrt{10}}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{4 + \sqrt{10}}}$$

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR. 1 –ONM LOCALA 2015 – ILFOV

$n = \sqrt{2015} \cdot \sqrt{45 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{49 - 4 - \sqrt{10}}$ 1p

$= \sqrt{2015} \cdot \sqrt{45 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{45 - \sqrt{10}}$ 1p

$= \sqrt{2015} \cdot \sqrt{2025 - 10}$ 1p

$= \sqrt{2015} \cdot \sqrt{2015} = 2015$ 1p

$a^n = 1 + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{2014}$ 1p

$a^n = 2^1 + 2^1 + 2^2 \ldots + 2^{2014} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2014}$

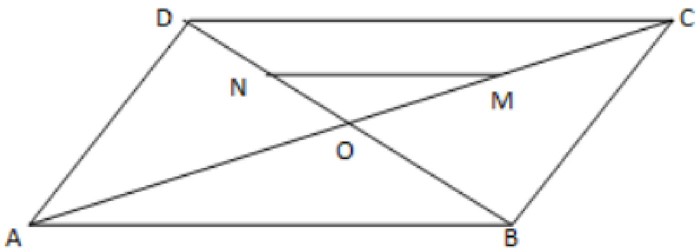
$a^n = 2^{2015}$ 1p

$a^{2015} = 2^{2015} \Rightarrow a = 2015$ 1p

PROBLEMA NR. 2 –ONM LOCALA 2015 - ILFOV

Fie ABCD un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$, M mijlocul lui $[OC]$ şi N mijlocul lui $[OD]$. Ştiind că $A_{\Delta BMC} = a^2$, calculaţi raportul dintre ariile patrulaterelor ABCD şi ABMN.

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR. 2 –ONM LOCALA 2015 – ILFOV



Solutie :

[BM] - mediană în triunghiul BOC 1p

$A_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot A_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} A_{ABCD} = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD}$ 1p

$A_{ABCD} = 8A_{BMC} = 8 \cdot a^2$ 1p

[MN] linie mijlocie în tr. DOC $\Rightarrow$ MN || DC || AB $\Rightarrow ABMN - trapez$ 1p

[MN] mediana in tr. CON

$A_{OMN} = \frac{1}{2} \cdot A_{CON} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} A_{DOC} = \frac{1}{4} \cdot A_{DOC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} A_{ABCD} = \frac{1}{16}\, 8 \cdot a^2 = \frac{a^2}{2}$.......... 1p

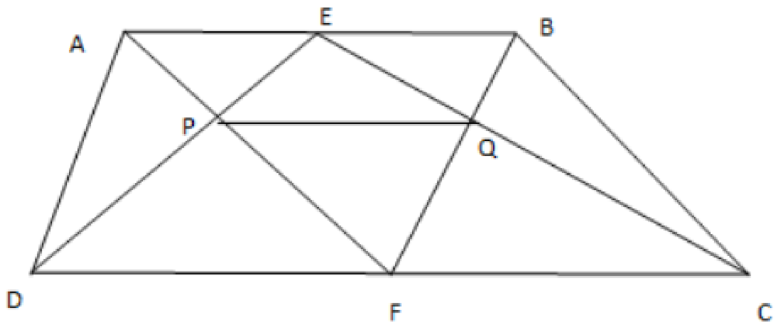
$A_{ABMN} = A_{AOB} + A_{BOM} + A_{MON} + A_{AON} = 2a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{9a^2}{2}$ 1p

$\frac{A_{ABCD}}{A_{ABMN}} = \frac{8a^2}{\frac{9a^2}{2}} = \frac{16}{9}$ 1p

PROBLEMA NR. 3 –ONM LOCALA 2015 - ILFOV

Fie ABCD trapez ($AB \parallel CD, AB < CD$), E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CD]$, $AF \cap DE = \{P\}$, $BF \cap CD = \{Q\}$. Arătați că $AB \parallel PQ$

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR. 3 –ONM LOCALA 2015 – ILFOV



Solutie

$AE \,||DF \xRightarrow{T.F.A.} \frac{PE}{PD} = \frac{AP}{PF} = \frac{AE}{DF} (1)$ .... 2 p

$BE \,||FC \xRightarrow{T.F.A.} \frac{BQ}{BC} = \frac{EQ}{QC} = \frac{EB}{FC} (2)$ ....2 p

$\left.\begin{array}{l}[AE] \equiv [EB]\\ [DF] \equiv [FC]\end{array}\right\} \xRightarrow{1)\ si\ 2)} \frac{PE}{PD} = \frac{EQ}{QC}$.. 2 p

cf. reciprocei Th lui Thales $\Rightarrow$ PQ || AB ....1 p

PROBLEMA NR. 4 –ONM LOCALA 2015 - TELEORMAN

Fie $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} \ldots + \sqrt{3^{2015}}$.

a) Să se arate că $a + 3^{1008} = a\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

b) Să se arate că $\frac{2a}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3}$ este pătratul unui număr natural.

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR. 4 –ONM LOCALA 2015 – TELEORMAN

1.a) Din egalitatea $a - a\sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3^{2016}} = \sqrt{3} - 3^{1008}$ rezultă relația cerută............3p

b) Relația de la a) se mai scrie $a(\sqrt{3} - 1) = 3^{1008} - \sqrt{3}$. Înmulțind egalitatea cu $\sqrt{3} + 1$ rezultă $2a = (3^{1008} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)$, deci $\frac{2a}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3} = 3^{1008} = (3^{504})^2$..................................4p

PROBLEMA NR. 5 –ONM LOCALA 2015 - TELEORMAN

Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $2|x - \sqrt{5}| + |x - 2\sqrt{5}| \in \mathbb{N}$.

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR. 5 –ONM LOCALA 2015 – TELEORMAN

Dacă $x < \sqrt{5}$ rezultă $2(\sqrt{5} - x) + 2\sqrt{5} - x = 4\sqrt{5} - 3x$, nu verifică……………………….2p

Dacă $\sqrt{5} \le x < 2\sqrt{5}$ rezultă $2(x - \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} - x = x$ și $x \in \mathbb{N}$. Deoarece $\sqrt{5} \le x < 2\sqrt{5}$, rezultă $x \in \{3,4\}$……………………………………………………………………..3p

Dacă $x \ge 2\sqrt{5}$ rezultă $2(x - \sqrt{5}) + x - 2\sqrt{5} = 3x - 4\sqrt{5}$, nu verifică…………………….2p

PROBLEMA NR. 6 –ONM LOCALA 2015 - TELEORMAN

În triunghiul ascuțitunghic ABC, $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, $D \in (BC)$, paralela prin D la AB intersectează (AC) în E, iar paralela prin D la AC intersectează AB în F .

Ducem $AG \perp DF$, $G \in DF$ și $AM \perp DE, M \in DE$. Dacă $\{H\} = AG \cap EF$, $\{T\} = DH \cap AB$, $\{V\} = AM \cap EF$ și $\{S\} = DV \cap AC$, să se arate că :

a) $AT \perp DH$.

b) $[DT] \equiv [DS]$.

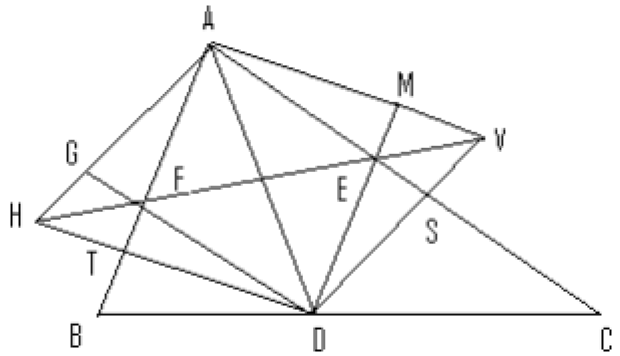
BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR. 6 –ONM LOCALA 2015 – TELEORMAN

a) $AFDE$ paralelogram, $[AD$ bisectoare, rezultă $AFDE$ romb și $EF \perp AD$ ………………….2p

Deci $HF \perp AD$, $DG \perp AH$ și F este ortocentrul triunghiului AHD, deci $AT \perp DH$…………2p

b) În mod asemănător va rezulta E ortocentrul triunghiului AVD, deci $AS \perp DV$………………2p

Triunghiurile dreptunghice ATD și ASD sunt congruente (ipotenuza $[AD]$ comună, $\widehat{TAD} \equiv \widehat{SAD}$) , deci $[DT] \equiv [DS]$……………………………………………………… 1p



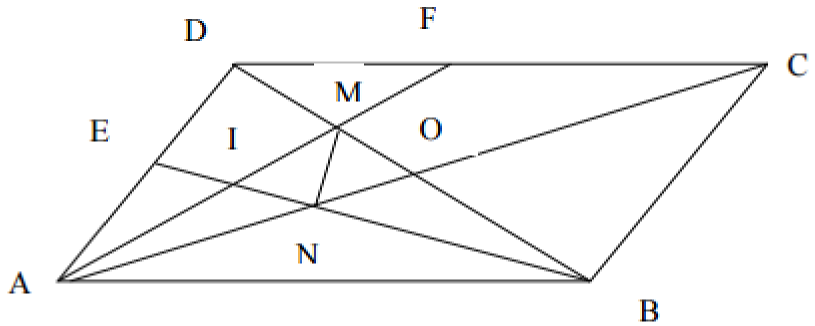
PROBLEMA NR. 7 –ONM LOCALA 2015 - TELEORMAN

Fie $ABCD$ un paralelogram, E este mijlocul lui $[AD]$ și F este mijlocul lui $[DC]$. Dacă $\{M\} = AF \cap BD$ și $\{N\} = BE \cap AC$, să se arate că $MN \parallel AD$.

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR. 7 –ONM LOCALA 2015 – TELEORMAN

Dacă O este intersecția diagonalelor paralelogramului, rezultă M centrul de greutate al triunghiului ADC și N centrul de greutate al triunghiului ADB….$4p$

În aceste triunghiuri, $[DO]$ și $[AO]$ sunt mediane, $\frac{OM}{MD}=\frac{ON}{NA}=\frac{1}{2}$, deci $MN \parallel AD$…………….$3p$



PROBLEMA NR.8 –ONM LOCALA 2015 – SATU MARE

a) Se dau numerele $a=\sqrt{\frac{1444}{361}}$; $b=\left(2\sqrt{27}+3\sqrt{50}-3\sqrt{45}\right):\left(2\sqrt{12}+5\sqrt{8}-3\sqrt{20}\right)$.

Arătați că numărul $a\cdot b+1$ este pătrat perfect.

b) Determinați cardinalul mulțimii $A=\left\{\overline{xyzt}/\frac{x+1}{y}=\frac{y-2}{z}=\frac{z+4}{t}=\frac{t-3}{x}\right\}$

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR.8 –ONM LOCALA 2015 – SATU MARE

$a=1$	**1 p**
$b=\frac{3}{2}$	**1 p**
$ab+1=4=2^2$	**2 p**
$\frac{x+1}{y}=\frac{y-2}{z}=\frac{z+4}{t}=\frac{t-3}{x}=1.$	**1 p**
$y=x+1; z=x-1; t=x+3$	**1 p**
Cum x; y; z; t nu pot fi nule, avem $x\in\{2;3;4;5;6\}$, deci card A = 5	**1 p**

PROBLEMA NR.9 –ONM LOCALA 2015 - SATU MARE

a) Determinați tripletele (a; b; c) de numere întregi care verifică relația

$$a^2+a+|b+3|+\left(c^2-1\right)^2\le 0$$

b) Aflați valoarea numărului $x=\sqrt{\left(5^n-2015\right)^2}-\sqrt{\left(2014-5^n\right)^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR.9 –ONM LOCALA 2015 – SATU MARE

$a^2+a=a(a+1)$ și produsul oricăror două numere întregi consecutive este nenegativ	1 p
$\|b+3\|\geq 0;\ (c^2-1)^2\geq 0,\ \forall\, b,c\in Z$	1 p
Din inegalitatea din enunț se obține $a(a+1)=0;\ b+3=0;\ c^2-1=0$	1 p
$(a;b;c)\in\{(0;-3;-1),(0;-3;1),(-1;-3;-1),(-1;-3;1)\}$	1 p
$x=\|5^n-2015\|-\|2014-5^n\|$	1 p
$\text{Pt. } n\in\{0;1;2;3;4\}\Rightarrow x=(-5^n+2015)-(2014-5^n)=1$	1 p
$\text{Pt. } n\geq 5\Rightarrow x=(5^n-2015)-(-2014+5^n)=-1$	1 p

PROBLEMA NR.10 –ONM LOCALA 2015 - SATU MARE

Fie triunghiul ABC echilateral și $D,E\in(BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAD)=m(\sphericalangle CAE)=20°$, $F\in(AD), G\in(AE)$ cu $m(\sphericalangle ABF)=m(\sphericalangle CBG)=20°$, iar $I\in(AE)$ cu $\sphericalangle ABI\equiv\sphericalangle CBI$.

a) Demonstrați că $FI \parallel BC$

b) Dacă $AD\cap BG=\{H\}$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului FGH.

Gazeta Matematică 11/2013

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR.10 –ONM LOCALA 2015 – SATU MARE

Triunghiul AFB isoscel, deci FA = FB $\Delta AFC\equiv\Delta BFC\ (LUL)\Rightarrow\sphericalangle(ACF)\equiv\sphericalangle BCF$ $\Leftrightarrow$ (CF bisectoare pt. $\sphericalangle ACD \overset{\text{T.Bis.}}{\Rightarrow} \frac{AF}{FD}=\frac{AC}{CD}$ (1)	1 p
(BI bisectoare pt. $\sphericalangle ABE$ in $\Delta ABE \overset{\text{T.bis.}}{\Rightarrow} \frac{AI}{IE}=\frac{AB}{BE}$ (2)	1 p
$\Delta ABE\equiv\Delta ACD\ (ULU)\Rightarrow BE=CD$ (3)	1 p
Din (1),(2),(3) si $AB=AC\Rightarrow\frac{AF}{FD}=\frac{AI}{IE}\overset{\text{R.T.Thales}}{\Rightarrow} FI\parallel BC$	1 p
b) ΔAGB isoscel $\Rightarrow GA=GB$ și $m(\sphericalangle AGB)=100°$ $\Delta AFG\equiv\Delta BFG(LLL)\Rightarrow m(\sphericalangle HGF)=50°$	1 p
$\sphericalangle HGF$ exterior $\Delta AFG\Rightarrow m(\sphericalangle AGB)=20°+50°=70°$	1 p
$m(\sphericalangle HGF)=60°$	1 p

PROBLEMA NR.11 –ONM LOCALA 2015 - SATU MARE

Se dă pătratul ABCD de centru O. Pe dreapta AB se ia punctul E astfel încât $B \in (AE)$ $m(\sphericalangle OEB) = 30°$. Perpendiculara în O pe OE intersectează dreapta BC în F. Arătați că:

a) Triunghiul EOF este isoscel

b) $[OE] \equiv [AB]$

BAREM DE CORECTARE PROBLEMA NR.11 –ONM LOCALA 2015 – SATU MARE

$m(\sphericalangle OBE) = m(\sphericalangle OCF) = 135°$	**1 p**
$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle COF) = 15°$	**1 p**
$OB = OC$	
$\Delta OBE \equiv \Delta OCF$ $(ULU) \Rightarrow OE = OF \Leftrightarrow \Delta EOF$ isoscel	**2 p**
Construim $OM \perp AB$, $M \in (AB)$	**1 p**
OM mediană corespunzătoare ipotenuzei în ΔAOB dreptunghic în O $\Rightarrow OM = \frac{AB}{2}$ (1)	**1 p**
În ΔEOM, din $T30° \Rightarrow OM = \frac{AB}{2}$ (2)	**1 p**
Din (1) și (2) avem AB = OE	

Mult succes!