ALGEBRĂ 12

100 legi de compoziție cu cerințe tip BAC

Materialul conține subiectele III - problema 1, selectate din variante BAC, SNEE 2008

100 structuri algebrice cu cerințe tip BAC

Selecție din Variante 2008 – SNEE

Varianta 001

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = x + y - 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că mulțimea numerelor reale împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x * 4^x = 0$.

e) Pentru $a \in \mathbb{R}$, să se calculeze $m = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{7\ termeni}$.

f) Să se arate că numărul $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} * \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ este număr rațional.

Varianta 002

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * y = (x-3)(y-3) + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

e) Să se calculeze $m = \underbrace{5 * 5 * \ldots * 5}_{5\ termeni}$.

f) Să se arate că numerele $a = (5*5) - 3$, $b = (5*5*5) - 3$, $c = (5*5*5*5) - 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Varianta 003

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x * (x+1) = x + 2$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că legea "$*$" nu admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că $|x + y| \le (x * y)\sqrt{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că numerele $a = (1*1)^2$, $b = (1*1*1)^2$, $c = (1*1*1*1)^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

f) Să se arate că numărul $(1+\sqrt{7}) * (1-\sqrt{7})$ este pătrat perfect.

Varianta 004

Se consideră mulțimea $G = (1, \infty) \subset \mathbb{R}$ şi legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se verifice că $x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$, $\forall x, y \in G$.

b) Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe G.

d) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe G.

e) Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

f) Să se rezolve ecuația $x * 2 = 5$, $x \in G$.

Varianta 005

Pe mulţimea $G=(0,\infty)$ se consideră legea de compoziţie $x*y=x^{\log_2 y}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $x*y=2^{(\log_2 x)\cdot(\log_2 y)}$, $\forall x,y\in G$.

b) Să se compare numerele $a=(2^2*4^2)*2^3$ şi $b=(2^2\cdot 2^3)*(2^2\cdot 4^2)$

c) Să se arate că legea "$*$" este asociativă pe G.

d) Să se demonstreze că legea "$*$" admite element neutru pe G.

e) Să se determine simetricul elementului $x=8^3$ în raport cu legea "$*$".

f) Să se rezolve ecuaţia $x*x=2$, $x\in G$.

Varianta 006

Pe mulţimea $G=(0,\ 1)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{xy}{2xy+1-x-y}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se verifice că $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$, $\forall x,y\in G$.

b) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x*y\in G$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe G.

d) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe G.

e) Să se demonstreze că mulţimea G împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

f) Să se rezolve în G ecuaţia $x*\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{7}$.

Varianta 007

Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ şi $x\circ y=x\cdot y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură algebrică de grup comutativ.

d) Să se arate că legea "$\circ$" este distributivă faţă de legea "$*$" pe $\mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze că $(\mathbb{R},*,\circ)$ este corp.

f) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x*y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Varianta 008

Pe mulţimea numerelor raţionale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{1}{2}(xy+x+y-1)$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

Se notează cu H mulţimea numerelor întregi impare.

a) Să se verifice că $x*y=\dfrac{1}{2}(x+1)(y+1)-1$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

b) Să se arate că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{Q}$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{Q}$.

d) Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x*y\in H$.

e) Să se determine elementele $x\in H$ cu proprietatea că există $x'\in H$, astfel încât $x*x'=x'*x=1$.

f) Să se arate că $x*\dfrac{1}{x}\geq 1$ pentru orice $x\in(0,\infty)$.

Varianta 009

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = ax + ay + b$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Pentru $b = 3$ să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă legea este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Pentru $a = 1$ şi $b = 3$ să se determine elementul neutru al legii "$*$" pe $\mathbb{R}$.

d) Pentru $a = 1$ şi $b = 3$ să se arate că $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

e) Pentru $a = b = 1$ să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^x * 9^x = 13$.

f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $(x * x) * x = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Varianta 010

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

d) Se consideră mulţimea $G = (1, \infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

e) Să se arate că $G = (1, \infty)$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.

f) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = \frac{3}{2}$.

Varianta 011

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 1}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că mulţimea numerelor reale împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

d) Să se demonstreze că expresia $E(x) = x * (-x)$ nu depinde de x.

e) Să se arate că $\frac{x}{y} * \frac{y}{x} \neq 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

f) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $2^x * 4^x = \sqrt[3]{3}$.

Varianta 012

Pe mulţimea numerelor raţionale se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y + a$ şi $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, cu $a \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{Q}$.

b) Să se demonstreze că legea "$\circ$" admite element neutru pe $\mathbb{Q}$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$,astfel încât $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$.

d) Să se arate că mulţimea $\mathbb{Q}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.

e) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ pentru care are loc egalitatea $x \circ x \circ x = (x+2)^3 + m, \forall x \in \mathbb{Q}$

f) Pentru $a = 2$, să se rezolve în mulţimea $\mathbb{Q}$ ecuaţia $x * x = x \circ x$.

Varianta 013

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = x + y + 4$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $2^a * 2^{-a} \geq 6$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x * 2^{x+1} = 16$.

c) Să se arate că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

e) Să se arate că $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.

f) Să se rezolve ecuația $(\log_2 x) * (\log_2 x^2) = 7$.

Varianta 014

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = xy - 6x - 6y + 42$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Fie mulțimea $G = [5, 7] \subset \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x * y = (x-6)(y-6) + 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

d) Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

e) Fie $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 7\}$. Să se arate că mulțimea M împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.

f) Să se determine numerele $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $x * y = 7$.

Varianta 015

Pe mulțimea $G = (\sqrt{2}, \infty) \subset \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6}$, $\forall x, y \in G$.

a) Să se verifice că $x * y = \sqrt{(x^2-2)(y^2-2)+2}$, $\forall x, y \in G$.

b) Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe G.

d) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe G.

e) Să se determine elementul simetric al numărului $x = \sqrt{8}$ în raport cu legea "$*$".

f) Să se arate că numerele $a = (2*2)^2 - 2$, $b = (2*2*2)^2 - 2$, $c = (2*2*2*2)^2 - 2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Varianta 016

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$, $x \circ y = xy - 3x - 3y + a$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că pentru $a = 12$ legea "$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că legea "$\circ$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$,astfel încât $2 \circ (3 * 1) = (2 \circ 3) * (2 \circ 1)$.

d) Să se arate că mulțimea $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.

e) Pentru $a = 12$ să se determine $m \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x \circ x \circ x = (x-3)^3 + m, \forall x \in \mathbb{Q}$

f) Pentru $a = 12$ să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * y = 2 \\ x \circ y = 1 \end{cases}$.

Varianta 017

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+3$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.
b) Să se demonstreze că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.
c) Să se demonstreze că $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.
d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(\log_2 x)*(\log_4 x)=6$.
e) Să se arate că numerele $a=2*2*2$, $b=a*2$ şi $c=b*2$, sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
f) Să se arate că numărul $m=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}*\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ este pătrat perfect.

Varianta 018

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy+6x+6y+10$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x*y=3(x+2)(y+2)-2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.
b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.
c) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.
d) Să se determine simetricul numărului $x=\dfrac{1}{3}$ în raport cu legea "$*$".
e) Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea $x*x*x=3^n(x+2)^3-n$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
f) Să se arate că numerele $a=(-1)*(-1)+2$, $b=(-1)*(-1)*(-1)+2$, $c=(-1)*(-1)*(-1)*(-1)+2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Varianta 019

Fie mulţimea $G=(-2,2)$ şi legea de compoziţie $x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x*y\in G$.
b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe G.
c) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe G.
d) Să se demonstreze că mulţimea G împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.
e) Să se arate că $x*y=\dfrac{2(x+2)(y+2)-2(2-x)(2-y)}{(x+2)(y+2)+(2-x)(2-y)}$, pentru orice $x,y\in G$.
f) Să se determine $x\in G$ pentru care $1\circ x=1\circ 1\circ 1$.

Varianta 020

Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-1$, $x\circ y=\dfrac{1}{2}(xy-x-y+3)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.
b) Să se arate că legea "$\circ$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.
c) Să se demonstreze că legea "$\circ$" este distributivă faţă de legea "$*$" pe $\mathbb{R}$.
d) Să se arate că $\mathbb{R}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.
e) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $a\circ x=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
f) Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $x\circ 3\circ 1=x\circ x$.

Varianta 021

Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + 2x + 2y + a$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, cu $a \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ ştiind că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{Z}$.

b) Pentru $a = 2$ să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{Z}$.

c) Dacă $a = 2$ să se arate că $(x + y + 2) * z = (x * z) + (y * z) + 2$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

d) Pentru $a = 2$ să se determine mulţimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{ există } x' \in \mathbb{Z}, x * x' = -1\}$.

e) Pentru $a = 2$ să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * y = 3$.

f) Fie mulţimea $H = \{-3, -1\}$. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât pentru oricare $x, y \in H$ să rezulte că $x * y \in H$.

Varianta 022

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * x = 1$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

d) Să se determine simetricul mumărului $x = \sqrt[3]{10}$ în raport cu legea "$*$".

e) Să se arate că numerele $a = (2 * 2)^3$, $b = (2 * 2 * 2)^3$ şi $c = (2 * 2 * 2 * 2)^3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

f) Să se arate că numărul $m = \sqrt[3]{32} * \sqrt[3]{33}$ este pătrat perfect.

Varianta 023

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * y = 2(x + 3)(y + 3) - 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

d) Se consideră mulţimea $G = (-3, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

e) Să se arate că mulţimea $G = (-3, +\infty)$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

f) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea $x * x * x = 2^n (x + 3)^3 - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Varianta 024

Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x * y = \dfrac{(x+1)(y+1)}{2} - 1$,

$$x \circ y = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(y+1)}{2} - 1, & x \in \mathbb{R}^* \text{ sau } y \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}.$$

a) Să se demonstreze că legea de compoziţie "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că există $e \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că structura algebrică $(\mathbb{R}, *)$ nu este grup.

d) Să se calculeze $\underbrace{(-1) * 0 * 1 * (-1) * 0 * 1 * \ldots * (-1) * 0 * 1}_{2007 \text{ termeni}}$.

e) Se consideră mulţimea $H = \{-1, 0, 1\}$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

f) Să se determine elementele simetrizabile ale mulţimii $H = \{-1, 0, 1\}$ în raport cu legea de compoziţie "$\circ$".

Varianta 025

Pe mulțimea $G=(2,+\infty)\subset\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2y^2-4x^2-4y^2+20}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $x*y=\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}$, $\forall x,y\in G$.

b) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x*y\in G$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe G.

d) Să se arate că legea "$*$" admite element neutru pe G.

e) Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup.

f) Să se determine numerele naturale $x,y\in G$ pentru care $x*y=8$.

Varianta 026

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-5$, $x\circ y=xy-5x-5y+30$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{Z}$.

b) Să se demonstreze că legea "$\circ$" admite element neutru pe $\mathbb{Z}$.

c) Să se arate că legea "$\circ$" este distributivă față de legea "$*$" pe $\mathbb{Z}$.

d) Să se demonstreze că $\mathbb{Z}$ împreună cu legea "$*$" formează o structură de grup comutativ.

e) Să se arate că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este inel.

f) Să se determine $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $x\circ x=x^2$.

Varianta 027

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{2}(x+y)+2+\sqrt{2}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x*\sqrt{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că legea „$*$" este asociativă pe mulțimea $\mathbb{R}$.

d) Să se determine elementul neutru al legii „$*$" pe mulțimea $\mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze că structura algebrică $(\mathbb{R},*)$ nu este grup.

f) Folosind eventual punctul b) să se calculeze $\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*1*0*1*\left(\sqrt{2}\right)*\left(\sqrt{3}\right)$.

Varianta 028

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=\dfrac{xy+x+y-1}{2}$,

$$x\circ y=\begin{cases}\dfrac{xy+x+y-1}{2}, & x\in\mathbb{R}^* \text{ sau } y\in\mathbb{R}^*\\ 1, & x=y=0\end{cases}.$$

a) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x*(-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $(-2008)*(-2007)*\ldots*(-1)*0*1*\ldots*2007*2008$.

d) Să se determine elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

e) Se consideră mulțimea $H=\{-1,0,1\}$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x\circ y\in H$.

f) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $H=\{-1,0,1\}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$".

Varianta 029

Pe intervalul $I=[1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$, $\forall x,y\in I$.

a) Să se arate că pentru oricare $x,y\in I$, rezultă că $x*y\in I$.

b) Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă pe I.

c) Să se determine elementul neutru al legii „$*$” definită pe I.

d) Să se arate că $(x*x)^2-1=(x^2-1)^2$, $\forall x\in I$.

e) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție „$*$” definită pe mulțimea $H=\{0,1,\sqrt{2}\}$.

f) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $H=\{0,1,\sqrt{2}\}$ în raport cu legea „$*$” definită pe H.

Varianta 030

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x\circ y=xy-2007(x+y)+2007^2+2007$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x-2007)(y-2007)+2007$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) Să se demonstreze că legea „$\circ$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Folosind eventual a) să se calculeze $2008\circ 2008\circ 2008\circ 2008$.

d) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$” definită pe $\mathbb{R}$.

e) Se consideră mulțimea $H=[2007,+\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x*y\in H$.

f) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ(x-1)=2007^2$.

Varianta 031

Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile $x*y=x+y-2$ şi $x\circ y=xy-2x-2y+6$.

a) Să se determine elementul neutru al legii „$*$” definită pe $\mathbb{Z}$.

b) Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă pe $\mathbb{Z}$.

c) Să se determine elementele simetrizabile ale lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$\circ$”.

d) Se consideră mulțimea $H=\{x\in\mathbb{Z}/x=2k+1,k\in\mathbb{Z}\}$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x\circ y\in H$.

e) Să se demonstreze că are loc egalitatea $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.

f) Să se arate că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este inel.

Varianta 032

Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, mulțimea tuturor resturilor obținute prin împarțirea numerelor naturale la 8. Pe mulțimea M se definesc legile de compoziție $x\odot y=r$, unde r este restul împărțirii produsului $x\cdot y$ la 8 şi $x\oplus y=p$, unde p este restul împărțirii sumei $(x+y)$ la 8.

Se admite că legile de compoziție "$\odot$" şi "$\oplus$" sunt asociative.

a) Să se întocmească tabla legilor de compoziție "$\odot$" şi "$\oplus$" definite pe mulțimea M.

b) Să se arate că $(5\oplus 6)\odot 7=(5\odot 7)\oplus(6\odot 7)$.

c) Să se calculeze $\underbrace{7\odot 7\odot\ldots\odot 7}_{2008\text{ cifre}}$.

d) Să se determine simetricele elementelor simetrizabile ale multimii M în raport cu legea "$\odot$".

e) Se consideră mulțimea $H=\{0,2,4,6\}$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x\odot y\in H$.

f) Fie mulțimea $G=\{1,3,5,7\}$. Să se demonstreze că mulțimea G împreună cu legea de compoziție "$\odot$" formează o structură de grup comutativ.

Varianta 033

Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=1+\log_3 x+\log_3 y,\ \ \forall x,y\in G.$

a) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x\circ y\in G$.

b) Să se compare numerele $a=(3^2\circ 3^3)\circ 3^4$ și $b=3^2\circ(3^3\circ 3^4)$.

c) Să se demonstreze că legea „$\circ$” nu este asociativă pe G.

d) Să se demonstreze că pentru oricare $m,n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $3^m\circ 3^n=m+n+1$.

e) Să se rezolve ecuația $3^x\circ 9^x=10$ în mulțimea G.

f) Să se calculeze, folosind eventual **d)**, $S=(3^1\circ 3^2)+(3^3\circ 3^4)+(3^5\circ 3^6)+...+(3^{11}\circ 3^{12})$.

Varianta 034

Pe mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se definește legea de compoziție $x*y=u.c.(x+y)$, unde $u.c.(x+y)$ reprezintă ultima cifră a sumei $x+y$, $\forall x,y\in M$. Se admite că legea de compoziție "$*$" este asociativă pe mulțimea M.

a) Să se verifice că $1*9=2*8=3*7$.

b) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție "$*$" definită pe mulțimea M.

c) Să se calculeze valoarea numărului $A=1*2*3*4*5*6*7*8*9$.

d) Să se demonstreze că legea "$*$" determină pe M o structură de grup comutativ.

e) Să se rezolve ecuația $(x*4)*5=6$, $x\in M$.

f) Să se calculeze valoarea numărului $N=\underbrace{5*5*...*5}_{\text{2008 cifre}}$.

Varianta 035

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2008(x-2008)(y-2008)+2008$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea "$*$" este comutativă pe mulțimea $\mathbb{R}$.

b) Să se determine $y\in\mathbb{R}$, astfel încât $x*y=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se determine $z\in\mathbb{R}$, astfel încât $x*z=z$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{2008\}$ rezultă că $x*y\in\mathbb{R}\setminus\{2008\}$.

e) Să se arate că legea "$*$" determină pe $\mathbb{R}\setminus\{2008\}$ o structură algebrică de grup comutativ.

f) Să se găsească două numere $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ cu proprietatea că $a*b\in\mathbb{Z}$.

Varianta 036

Pe mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se definește legea de compoziție $x*y=u.c.(x\cdot y)$, unde $u.c.(x\cdot y)$ reprezintă ultima cifră a produsului $x\cdot y$, $\forall x,y\in M$. Se admite că legea de compoziție "$*$" este asociativă pe mulțimea M..

a) Să se arate că $5*x=0$, pentru orice x număr par din mulțimea M.

b) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție "$*$" definită pe mulțimea M.

c) Să se calculeze valoarea numărului $N=1*2*3*4*5*6*7*8*9$.

d) Să se determine elementele simetrizabile mulțimii M în raport cu legea "$*$".

e) Se consideră mulțimea $H=\{0,2,4,6,8\}$. Să se arate că, pentru orice $x,y\in H$ rezultă că $x*y\in H$.

f) Să se rezolve ecuația $(x*3)*7=9$, $x\in M$.

Varianta 037

Pe mulțimea numerelor naturale se defineşte legea de compoziție $x * y = r$, unde r este restul împărțirii produsului $x \cdot y$ la 10. Se admite că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{N}$. Se consideră mulțimea $I = \{1,3,5,7,9\}$.

a) Să se arate că $10 * x = 0, \forall x \in \mathbb{N}$

b) Să se calculeze valoarea numărului $5 * 5 * 5 * 5 * 5$.

c) Să se arate că, pentru oricare $\forall x, y \in I$ rezultă că $x * y \in I$.

d) Să se demonstreze că legea "$*$" determină pe mulțimea $I \setminus \{5\}$ o structură de grup comutativ.

e) Să se calculeze valoarea numărului $A = 2 * 4 * 6 * ... * 2008$.

f) Să se demonstreze că mulțimea $C = \{x \in \mathbb{N} | x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{N}$ în raport cu legea "$*$".

Varianta 038

În mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale se consideră submulțimile $M = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$ şi $P = \{n^2 | n \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se demonstreze că produsul oricăror două elemente din *M* este tot un element al mulțimii *M.*

b) Să se arate că operația "$\cdot$" de înmulțire a numerelor raționale determină pe mulțimea *M* o structură algebrică de grup comutativ.

c) Să se arate că pentru oricare $x, y \in P$, rezultă că $x \cdot y \in P$.

d) Să se determine mulțimea

$U(P) = \{x \in P |$ x este element inversabil al mulțimii P în raport cu înmulțirea numerelor$\}$.

e) Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea *M* care au exponenți naturali consecutivi este element al mulțimii *P.*

f) Să se arate că $M \cap P \neq \varnothing$.

Varianta 039

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 8(x-8)(y-8)+8$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $x * 8$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze valoarea numărului $A = (-8) * (-7) * ... * 0 * ... * 7 * 8$.

d) Se consideră mulțimea $H = [8, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x * y \in H$.

e) Să se determine mulțimea

$U(H) = \{x \in H |$ x este element inversabil al mulțimii H în raport cu legea de compoziție "$*$"$\}$.

f) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $a * b \in \mathbb{Z}$.

Varianta 040

Pe mulțimea numerelor naturale se defineşte legea de compoziție $x * y = r$, unde r este restul împărțirii produsului $x \cdot y$ la 10. Se admite că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{N}$.

Se consideră mulțimea $P = \{2,4,6,8\}$.

a) Să se arate că $10 * x = 0, \forall x \in \mathbb{N}$.

b) Să se calculeze $6 * 6 * 6 * 6$.

c) Să se arate că pentru oricare $x, y \in P$, rezultă că $x * y \in P$.

d) Să se demonstreze că legea "$*$" determină pe mulțimea P o structură algebrică de grup comutativ.

e) Să se rezolve ecuația $(x * 2) * 4 = 8$ în mulțimea *P.*

f) Să se calculeze valoarea numărului $A = 1 * 2 * 3 * ... * 2008$.

Varianta 041

Fie $M=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,x=a^2+2b^2,\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$, $H=\{1,2,4,6,8,9\}$ două submulţimi ale mulţimii numerelor naturale $\mathbb{N}$ şi legea de compoziţie $x*y=u.c.\left(x^y\right)$, unde $u.c.\left(x^y\right)$ este ultima cifră a numărului x^y, definită pe mulţimea $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

a) Să se demonstreze că $H\subset M$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{N}$ pentru care $1=a^2+2b^2$.

c) Să se determine numărul elementelor inversabile din mulţimea M în raport cu operaţia de înmulţire a numerelor naturale.

d) Să se verifice că $9*2\neq 2*9$.

e) Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x*y\in H$.

f) Să se determine o submulţime a mulţimii H pe care legea "$*$" este comutativă.

Varianta 042

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-7(x+y)+7^2+7\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Fie $M=[6,8]$ o submulţime a lui $\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $7*x,\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $x*y=(x-7)(y-7)+7,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se arate că dacă $x=6+\dfrac{1}{\sqrt{2}},y=6-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, rezultă că $x*y\in M$.

e) Să se determine elementele simetrizabile ale mulţimii M în raport cu legea "$*$".

f) Să se calculeze valoarea numărului $A=1*2*3*...*2008$.

Varianta 043

Se consideră mulţimea $M=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ şi operaţiile "$+$" şi "$\cdot$" de adunare şi respectiv de înmulţire a numerelor reale.

a) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x+y\in M$.

b) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x\cdot y\in M$.

c) Să se arate că $\{0,1\}\subset M$.

d) Să se demonstreze că numărul $5-\sqrt{2}$ nu este element inversabil al mulţimii M în raport cu operaţia "$\cdot$"

e) Să se arate că $(M,+)$ este grup comutativ.

f) Să se demonstreze că orice element al mulţimii $H=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},a^2-2b^2=1\right\}$ este element inversabil în raport cu operaţia "$\cdot$".

Varianta 044

Pe intervalul $I=\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{xy-6}{x+y-5},\ \forall x,y\in I$.

a) Să se demonstreze că dacă $x=\sqrt{3}$ şi $y=-\sqrt{3}$, atunci $x*y\in I$.

b) Se consideră intervalul $I_1=(-\infty,2]$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in I_1$, rezultă că $x*y\in I_1$.

c) Să se verifice că legea "$*$" este asociativă pe intervalul $I_1=(-\infty,2]$.

d) Să se rezolve pe intervalul $I_1=(-\infty,2]$ ecuaţia $x*2=2$.

e) Să se demonstreze că legea "$*$" nu admite element neutru pe mulţimea $I_1=(-\infty,2]$.

f) Să se calculeze valoarea numărului $A=(-2008)*(-2007)*...*0*1*2$.

Varianta 045

Pe intervalul $I=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy-2}{x+y-3}$, $\forall x,y\in I$.

a) Să se demonstreze că dacă $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$, atunci $x*y\in I$.

b) Se consideră intervalul $I_1=(-\infty,1]$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in I_1$, rezultă că $x*y\in I_1$.

c) Să se verifice că legea "$*$" este asociativă pe intervalul $I_1=(-\infty,1]$.

d) Să se rezolve pe intervalul $I_1=(-\infty,1]$ ecuaţia $x*1=1$.

e) Să se demonstreze că legea "$*$" nu admite element neutru pe mulţimea I_1.

f) Să se calculeze valoarea numărului $A=(-2008)*(-2007)*...*(-1)*0*1$.

Varianta 046

Pe intervalul $I=\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy-6}{x+y-5}$, $\forall x,y\in I$.

a) Să se demonstreze că dacă $x=\sqrt{7}$, $y=5$, atunci $x*y\in I$.

b) Se consideră intervalul $I_1=[3,+\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in I_1$, rezultă că $x*y\in I_1$.

c) Să se verifice că legea "$*$" este asociativă pe intervalul $I_1=[3,+\infty)$.

d) Să se rezolve pe intervalul $I_1=[3,+\infty)$ ecuaţia $3*x=3$.

e) Să se demonstreze că legea "$*$" nu admite element neutru pe mulţimea $I_1=[3,+\infty)$.

f) Să se calculeze valoarea numărului $A=3*4*5*...*2007*2008$.

Varianta 047

Se consideră mulţimea $M=\{a-b\sqrt{3}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ şi operaţiile "$+$" şi "$\cdot$" de adunare şi respectiv de înmulţire a numerelor reale.

a) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x+y\in M$.

b) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x\cdot y\in M$.

c) Să se arate că mulţimea $\{0,1\}\subset M$.

d) Să se demonstreze că numărul $5+\sqrt{3}$ nu este element inversabil al mulţimii M în raport cu operaţia "$\cdot$".

e) Să se arate că $(M,+)$ este grup comutativ.

f) Să se demonstreze că orice element al mulţimii $H=\left\{a-b\sqrt{3}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},a^2-3b^2=1\right\}$ este element inversabil în raport cu operaţia "$\cdot$".

Varianta 048

Pe intervalul $I=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{xy-2}{x+y-3}$, $\forall x,y\in I$.

a) Să se demonstreze că dacă $x=\sqrt{5}$ şi $y=3$, atunci $x*y\in I$.

b) Se consideră intervalul $I_1=[2,+\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in I_1$, rezultă că $x*y\in I_1$.

c) Să se verifice că legea "$*$" este asociativă pe intervalul $I_1=[2,+\infty)$.

d) Să se rezolve pe intervalul $I_1=[2,+\infty)$ ecuaţia $2*x=2$.

e) Să se demonstreze că legea "$*$" nu admite element neutru pe mulţimea $I_1=[2,+\infty)$.

f) Să se calculeze valoarea numărului $A=2*3*4*...*2007*2008$.

Varianta 049

Se consideră mulţimea $M=\left\{a+b\sqrt{3}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ şi operaţiile „+" şi „$\cdot$" de adunare şi respectiv de înmulţire a numerelor reale.

a) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x\cdot y\in M$.

b) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x+y\in M$.

c) Să se arate că mulţime $\{0,1\}\subset M$.

d) Să se demonstreze că $(M,+,\cdot)$ este inel comutativ.

e) Folosind eventual relaţia $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$, să se determine simetricul elementului $x=2-\sqrt{3}\in M$ în raport cu operaţia „$\cdot$".

f) Să se determine două numere $x,y\in M\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $x\cdot y\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$.

Varianta 050

Se consideră mulţimea $M=\left\{a+b\sqrt{15}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ şi operaţiile „+" şi „$\cdot$" de adunare şi respectiv de înmulţire a numerelor reale.

a) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x\cdot y\in M$.

b) Să se demonstreze că pentru oricare $x,y\in M$ rezultă că $x+y\in M$.

c) Să se arate că mulţimea $\{0,1\}\subset M$.

d) Să se demonstreze că $(M,+,\cdot)$ este inel comutativ.

e) Folosind eventual relaţia $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$, să se determine simetricul elementului $x=4-\sqrt{15}\in M$ în raport cu operaţia „$\cdot$".

f) Să se determine două numere $x,y\in M\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $x\cdot y\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$.

Varianta 051

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Se consideră mulţimea $H=\{0,1,2,3,4\}$.

a) Alcătuind tabla legii de compoziţie "$\circ$" pe mulţimea H, să se arate că dacă $x,y\in H$, atunci $x\circ y\in H$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$\circ$" este comutativă pe H.

c) Folosind eventual tabla legii de compoziţie, să se arate că legea de compoziţie „$\circ$" nu este asociativă pe H.

d) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$\circ$" admite element neutru pe H.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(x^2\right)\circ(-1)=10$.

f) Să se demonstreze că $(x\circ 1)+(x\circ 3)\geq 2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Varianta 052

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\perp y=\sqrt{x^2+y^2}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\left(\sqrt{20-8\sqrt{6}}\right)\perp\left(\sqrt{10-4\sqrt{6}}\right)+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziţie "$\perp$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că legea de compoziţie "$\perp$" nu admite element neutru pe mulţimea $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că legea de compoziţie "$\perp$" admite element neutru pe $H=[0,+\infty)$

e) Să se determine numerele $x,y\in\mathbb{Z}$ pentru care $x\perp y=\sqrt{13}$.

f) Să se calculeze valoarea numărului $A=1\perp\left(2\sqrt{2}\right)\perp\left(3\sqrt{3}\right)\perp\left(4\sqrt{4}\right)\perp\left(5\sqrt{5}\right)$.

Varianta 053

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Se consideră $H = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right).$

a) Folosind eventual faptul că $x \circ y = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$, să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \circ a = a \circ x = a, \forall x \in \mathbb{R}.$

c) Să se determine $b \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \circ b = b \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

d) Să se determine mulțimea $A \subset H,\ A = \left\{x \in H \mid \text{ există } x' \in H \text{ astfel încât } x \circ x' = x' \circ x = \frac{4}{9}\right\}.$

e) Să se demonstreze că $\left(H \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, \circ\right)$ este grup comutativ.

f) Să se găsească două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b = 2$.

Varianta 054

Pe mulțimea numerelor raționale se defineşte legea de compoziție $x \perp y = x + y - \frac{xy}{2}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

a) Să se calculeze $x \perp y + \frac{(2-x)(2-y)}{2} - 2, \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziție "$\perp$"este asociativă şi comutativă pe $\mathbb{Q}$.

c) Să se demonstreze că legea de compoziție "$\perp$" admite element neutru pe mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$.

d) Să se determine $a \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x \perp a = a, \ \forall x \in \mathbb{Q}$.

e) Fie mulțimea $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$. Să se demonstreze că $(M, \perp)$ este grup comutativ.

f) Să se calculeze folosind eventual punctul **d)**, valoarea numărului
$A = (-8) \perp (-7) \perp ... \perp (-1) \perp 0 \perp 1 \perp ... \perp 7 \perp 8.$

Varianta 055

Pe mulțimea $H = \{0,1,2,3,4\}$ se defineşte legea de compoziție $x \circ y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ x + y, & x < y \leq 2 \\ y - x, & x \leq 3 \text{ și } y > 2 \end{cases}, \ \forall x, y \in H$.

a) Alcătuind tabla operației „$\circ$", să se arate că dacă $x, y \in H$, atunci $x \circ y \in H$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$" nu este comutativă pe H .

c) Folosind eventual tabla operației „$\circ$", să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$" nu este asociativă pe H .

d) Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$" admite element neutru pe H .

e) Să se demonstreze că $x \circ x = 0, \ \forall x \in H.$

f) Să se calculeze, de la stânga la dreapta, valoarea numărului $A = 1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ 3 \circ 2 \circ 1.$

Varianta 056

Pe mulțimea $A=[0,1)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1},\forall x,y\in A$.

a) Să se demonstreze că $x*y=\dfrac{2xy}{(2x-1)(2y-1)+1},\forall x,y\in A$.

b) Să se arate că pentru oricare $x,y\in A$, rezultă că $x*y\in A$.

c) Să se demonstreze că, pentru oricare $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ rezultă că $x*x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

d) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" admite element neutru pe A.

e) Să se determine mulțimea $B\subset A$, $B=\left\{x\in A \mid \text{ există } x'\in A \text{, astfel încât } x*x'=x'*x=\dfrac{1}{2}\right\}$.

f) Să se demonstreze că $(A\setminus\{0\},*)$ este grup comutativ.

Varianta 057

Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$, $\forall x,y\in G$.

a) Să se arate că $x*y=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$, $\forall x,y\in G$

b) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x*y\in G$.

c) Să se rezolve în G ecuația $x*2=2$.

d) Folosind eventual a), să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" este asociativă pe G.

e) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" admite element neutru pe G.

f) Să se determine $x\in G$ pentru care există $x'\in G$, astfel încât $x*x'=x'*x=\sqrt{2}$.

Varianta 058

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\perp y=xy-4(x+y)+20$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $x\perp y=(x-4)(y-4)+4$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\perp(x+1)=4$.

c) Să se demonstreze că $x\perp y\geq 4$ pentru oricare $x,y\in[4,+\infty)$.

d) Să se demonstreze că legea de compoziție „$\perp$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

e) Să se arate că 5 este element neutru pentru legea de compoziție „$\perp$".

f) Să se calculeze valoarea numărului $A=1\perp 2\perp 3\perp 4\perp 5$.

Varianta 059

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x\circ y=x+y+\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $(x^2+\frac{1}{4})\circ(y^2+\frac{1}{4})\geq 0$ pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea „$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că legea „$\circ$" admite element neutru pe G.

d) Să se demonstreze că $(\mathbb{R},\circ)$ este grup comutativ.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2(x\circ x^2)=-2$.

f) Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $\left(2^n+\dfrac{1}{4}\right)\circ\left(2^{n+1}+\dfrac{1}{4}\right)=6$.

Varianta 060

Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + x + y$.

a) Să se demonstreze că „$*$" este lege de compoziţie asociativă.

b) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$" admite element neutru pe $\mathbb{Z}$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care există $x' \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x * x' = 0$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $3^x * 3^{x+1} = 7$.

e) Să se calculeze $0 * (-1) * (-2) * ... * (-13)$.

f) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x * y = 1$.

Varianta 061

Pe mulţimea numerelor întregi se definesc următoarele legi de compoziţie $a * b = a + b + ab$ şi $a \circ b = a + b - ab, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Se consideră mulţimea $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -1\}$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x * y \in H$.

b) Se consideră mulţimea $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x \circ y \in G$.

c) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{Z}$.

d) Să se determine elementul neutru pentru legea de compoziţie „$*$".

e) Să se demonstreze că $\forall a \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea $\left(a * \dfrac{1}{a}\right) \geq 3$.

f) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x * x = -1$.

Varianta 062

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x + y - xy$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ 2 = x$.

b) Să se arate că $x \circ y = 1 - (x-1)(y-1)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că legea „$\circ$" este asociativă.

d) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$".

e) Să se demonstreze că oricare element $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este simetrizabil în raport cu legea „$\circ$".

f) Să se calculeze $x \circ x \circ x \circ x$.

Varianta 063

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 5x + 5y + xy + 20$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * (-5) * x = -5, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Se consideră mulţimea $G = (-5, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

c) Ştiind că $G = (-5, +\infty)$, să se demonstreze că $\forall x \in G$, există $x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = -4$.

d) Să se calculeze valoarea expresiei $E = \dfrac{3 * (-5) - 1}{(-5) * 2 + 3}$.

e) Folosind eventual egalitatea $x * y = (x+5) \cdot (y+5) - 5$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, să se rezolve ecuaţia $(\log_2 x) * (\log_3 x) = -5$.

f) Să se calculeze valoarea numărului $A = (-2008) * (-2007) * ... * (-1) * 0 * 1 * ... * 2008$.

Varianta 064

Pe mulțimea $M=[0,\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy},\forall x,y\in M$.

a) Să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}$.

b) Să se demonstreze că „$*$” este lege de compoziție asociativă pe M.

c) Să se demonstreze că legea „$*$” admite element neutru pe M.

d) Să se demonstreze că $x=0$ este singurul element simetrizabil al mulțimii M în raport cu legea dată.

e) Să se arate că $\dfrac{1}{x}*\dfrac{1}{y}=x*y,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$.

f) Folosind eventual punctul **e)**, să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{\left(1*\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{7}*\frac{1}{8}\right)}{(1*2)\cdot(3*4)\cdot\ldots\cdot(7*8)}$.

Varianta 065

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, şi $2^x+2^y-1>0$. Se consideră mulțimea $M=[0,+\infty)$.

a) Să se arate că dacă $m,n\in\mathbb{N}$, atunci $m*n\in M$.

b) Să se determine $x\in M$, astfel încât $0*x=x^2$.

c) Să se demonstreze că legea „$*$” admite element neutru pe M.

d) Să se determine toate valorile lui $x\in M$, pentru care există $x'\in M$ cu proprietatea că $x*x'=x'*x=0$.

e) Să se demonstreze că are loc relația $x*(-x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$.

f) Să se calculeze $2^{1*2}+2^{3*4}$.

Varianta 066

Pe mulțimea $G=[a,+\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2-a^2}$, $\forall x,y\in[a,+\infty)$, cu $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $a*a$ pentru $a<0$.

b) Ştiind că $a\geq 0$, să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x*y\in G$.

c) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă pe G.

d) Să se demonstreze că pentru $a\geq 0$ legea de compoziție „$*$” admite element neutru pe G.

e) Pentru $a\geq 0$ să se determine elementele simetrizabile din G în raport cu legea de compoziție „$*$”.

f) Să se rezolve în G ecuația $(2x+1)*a=a*(x+2)$.

Varianta 067

Pe mulțimea $G=(-1,1)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy},\ \forall x,y\in G$.

a) Să se rezolve în mulțimea G ecuația $(x+\frac{1}{2})*(x-\frac{1}{2})=0$.

b) Să se arate că dacă $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, atunci $x*y\in G$.

c) Să se demonstreze că $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in G$.

d) Să se demonstreze că legea „$*$” admite element neutru pe G.

e) Să se determine $x\in G$ pentru care există $x'\in G$, astfel încât $x*x'=x'*x=0$.

f) Să se arate că $\dfrac{1}{x}*\dfrac{1}{y}=x*y$, pentru oricare $x,y\in(-1,0)\cup(0,1)$.

Varianta 068

Pe mulțimea $A=[3,+\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21,\ \forall x,y\in A$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $x*y=a(x-b)(y-b)+b,\ \forall x,y\in A$.

b) Să se arate că pentru oricare $x,y\in A\setminus\{3\}$, rezultă că $x*y\in A\setminus\{3\}$.

c) Să se determine $c\in A$ pentru care are loc egalitatea $x*c=c*x=c,\ \forall x\in A$.

d) Să se demonstreze că $(A\setminus\{3\},*)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.

e) Să se rezolve ecuația $(\log_3 x)*(\log_x 27)=3,\ x\in A$.

f) Să se calculeze $(\log_3 27)*(\log_3 81)*(\log_3 243)*(\log_3 729)$.

Varianta 069

Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x\circ y=1+\log_2 x+\log_2 y,\ \forall x,y\in G$.

a) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x\circ y\in G$.

b) Să se compare numerele $a=(2^2\circ 2^3)\circ 2^4$ şi $b=2^2\circ(2^3\circ 2^4)$.

c) Să se demonstreze că legea „$\circ$” nu este asociativă pe G.

d) Să se demonstreze că pentru oricare $m,n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $2^m\circ 2^n=m+n+1$.

e) Să se rezolve ecuația $2^x\circ 8^x=9$ în mulțimea G.

f) Să se calculeze, folosind eventual **d)**, $S=(2^1\circ 2^2)+(2^3\circ 2^4)+(2^5\circ 2^6)+...+(2^{11}\circ 2^{12})$.

Varianta 070

Pe mulțimea $A=(0,+\infty)$, se definesc legile de compoziție $x*y=xy$ şi $x\circ y=x^{\lg y},\ \forall x,y\in A$.

a) Să se demonstreze că $x^{\lg y}=10^{\lg x\cdot\lg y},\ \forall x,y\in(0,+\infty)$.

b) Să se demonstreze că $(2\circ 10)\circ 3=2\circ(10\circ 3)$.

c) Să se demonstreze că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\forall x,y,z\in A$.

d) Să se demonstreze că $x\circ 1=1\circ x=1,\forall x\in A$.

e) Să se calculeze $\frac{1}{4}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{2}\circ 1\circ 2\circ 3\circ 4$.

f) Să se rezolve ecuația $(x\circ 10)*\left(x^2\circ 10\right)=27$, în mulțimea $A\cap\mathbb{N}$.

Varianta 071

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x\circ y=x+y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $(1\circ 2)\circ(3\circ 4)$.

b) Să se demonstreze că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că legea „$\circ$” admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că pentru oricare $x\in\mathbb{R}$, există $x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\circ x'=-2$.

e) Să se rezolve ecuația $x\circ x=4x^2$.

f) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $x\circ\frac{1}{x}=x\circ x$.

Varianta 072

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy + x + y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ are loc relația $x * x \geq -1$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că există $e \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * e = e * x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x * (1 * x) = 1$.

f) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x * 2 = y \\ y * 3 = x \end{cases}$.

Varianta 073

Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se definește legea de compoziție $x * y = \dfrac{4x + 4y}{4 + xy},\ \forall x, y \in G$.

a) Să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}(x * y) = \dfrac{(x+2)(y+2) - (x-2)(y-2)}{(x+2)(y+2) + (x-2)(y-2)}, \forall x, y \in G$.

b) Să se demonstreze că dacă $x \in G$, atunci $x * (-x) \in G$.

c) Să se determine $e \in G$, pentru care $x * e = e * x = x, \forall x \in G$.

d) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" este asociativă pe G.

e) Să se demonstreze că pentru oricare $x \in G$, există $x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = 0$.

f) Folosind eventual punctul **b)** să se calculeze $\left(\dfrac{1}{8}\right) * \left(\dfrac{1}{7}\right) * \ldots * \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{1} * \left(\dfrac{-1}{1}\right) * \left(\dfrac{-1}{2}\right) * \ldots * \left(\dfrac{-1}{7}\right) * \left(\dfrac{-1}{8}\right)$.

Varianta 074

Pe mulțimea $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, A \subset \mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 1$ și $x \circ y = \dfrac{1}{2}(xy - x - y + 3),\ \forall x, y \in A$.

a) Să se demonstreze că $x \circ y = \dfrac{(x-1)(y-1)}{2} + 1, \forall x, y \in A$.

b) Să se demonstreze că $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), \forall x, y, z \in A$.

c) Să se demonstreze că $x \circ 1 \circ x = 1, \forall x \in A$.

d) Să se determine $x \in A$, pentru care există $x' \in A$, astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = 3$.

e) Folosind eventual că $x \circ x = \dfrac{(x-1)^2}{2} + 1, \forall x \in A$, să se rezolve ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1$ în mulțimea A.

f) Să se calculeze valoarea numărului $A = (-7) \circ (-5) \circ (-3) \circ (-1) \circ 1 \circ 3 \circ 5 \circ 7$.

Varianta 075

Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x \perp y = x + y + 1$ și $x \circ y = x + y + xy\ , \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se demonstreze că $(2x - 1) \perp x^2 = x \circ x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziție "$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{Z}$.

c) Să se demonstreze că $x \circ (-1) = (-1) \circ x\ ,\ \forall x \in \mathbb{Z}$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $2^x \perp 2^{x+1} = 3 \circ 1$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $3 \perp \log_2 x = 2 \circ \log_2 x$.

f) Să se afle valoarea numărului $a = (1 - 2^4) \circ (1 - 2^3) \circ (1 - 2^2) \circ (1 - 2^1) \circ (1 - 2^0)$.

Varianta 076

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * y = (2x-1)(2y-1) + \frac{1}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice dacă „$*$" este o lege de compoziţie asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$".

d) Să se rezolve ecuaţia $x^2 * 3 = 0, \ x \in [0, \infty)$.

e) Să se găsească numerele $x \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x * x = \frac{1}{2}$.

f) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(2^x\right) * \left(2^{2x}\right) = \frac{1}{2}$.

Varianta 077

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $2 * \frac{4}{5}$.

b) Se consideră mulţimea $H = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x * y \in H$.

c) Să se arate că $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ are loc relaţia $(x * y) * z = x * (y * z)$.

d) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$" pe $\mathbb{R}$.

e) Să se rezolve ecuaţia $\left(2^x\right) * \left(4^x\right) = \frac{3}{2}, \ x \in \mathbb{R}$.

f) Să se rezolve inecuaţia $\left(2^x\right) * \left(2^{2x}\right) \geq 4 \cdot 2^{3x}, \ x \in \mathbb{R}$.

Varianta 078

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = -xy + 5x + 5y - 20, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * y = (x-5)(5-y) + 5, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Se consideră mulţimea $G = (-\infty, 5)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$, rezultă că $x * y \in G$.

c) Să se arate că legea de compoziţie „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se arate că $x * 4 = 4 * x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

e) Se dă expresia $E(x) = (x+8) * (x-7) - 63$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că $E(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

f) Să se demonstreze că $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$ este grup comutativ.

Varianta 079

Pe mulţimea numerelor întregi se definesc operaţiile $x \perp y = x + y + 2, \ \forall x, y \in \mathbb{Z}$ şi $x \Delta y = xy + 2x + 2y + 2, \ \forall x, y \in \mathbb{Z}$

a) Să se arate că legea de compoziţie „Δ" este asociativă pe $\mathbb{Z}$.

b) Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „Δ" pe $\mathbb{Z}$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \Delta (-3) = -1$.

d) Să se demonstreze că $x \Delta (y \perp z) = (x \Delta y) \perp (x \Delta z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

e) Să se rezolve ecuaţia $x \perp x \perp x \perp x = -x^2 + 2$ pe $\mathbb{Z}$.

f) Să se calculeze $2 \perp 2^2 \perp 2^3 \perp 2^4 \perp 2^5$.

Varianta 080

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + x + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că are loc egalitatea $x * y = (x+1)(y+1) - 1, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se găsească elementul neutru al legii de compoziție „$*$" pe $\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că legea „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x * x = -1$.

e) Folosind eventual a), să se determine, $x \in (0, +\infty)$, astfel încât $(\log_2 x) * (\log_{\frac{1}{2}} x) = -1$.

f) Să se determine $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$, astfel încât $2 * C_n^{n-2} = 11$.

Varianta 081

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = x + y + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că operația „$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine $x \in \mathbb{Q}$, pentru care are loc egalitatea $x \circ \frac{2x}{3} = \frac{5}{4}$.

c) Să se calculeze $1 \circ 2 \circ 3 \circ ... \circ 50$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(3^x) \circ (9^x) = 3$.

e) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2x + 1$. Să se arate că $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

f) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\sqrt{x+4} \circ \sqrt{5-x} = 4$.

Varianta 082

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x \perp y = x + y - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea „$\perp$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuația $2^x \perp 4^x = 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x \perp x^2 \leq 1$.

d) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $C_n^0 \perp C_n^1 \perp C_n^2 = 44 + n, \ n \geq 2$.

e) Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2x - 1$. Să se arate că $f(x \perp y) = f(x) \perp f(y)$.

f) Să se calculeze $2 \perp 2^2 \perp 2^3 \perp ... \perp 2^{10}$.

Varianta 083

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = x + y - 6, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea de compoziție „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $e = 6$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$" pe mulțimea $\mathbb{R}$.

c) Să se determine simetricul elementului (-7) în raport cu legea de compoziție „$*$".

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x^2 + 3x - 1) * (2x^2 - x + 6) \geq 0$.

e) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, pentru care numerele $a = 6 * 2x^2, \ b = x * \frac{x}{2}, \ c = (-11x^2) * 6$, sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

f) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} * \frac{1}{2^2} * ... * \frac{1}{2^7} < 0$.

Varianta 084

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-x-y-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $x*y=-(x+1)(y+1)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$ ” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$ ” pe $\mathbb{R}$.

d) Să se găsească elementele simetrizabile din $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie „$*$ ”.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $(x+2)*(2x-3)=5$.

f) Să se rezolve inecuaţia $(x-3)*(x+1)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$.

Varianta 085

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy+6x+6y+10,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=3(x+2)(y+2)-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziţie este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Se consideră mulţimea $M=[-2,+\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in M$, rezultă că $x*y\in M$.

d) Să se determine elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „$*$” pe $\mathbb{R}$.

e) Se dau numerele reale $a=x*\dfrac{x}{3}$ şi $b=\dfrac{x}{2}*x$. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât media aritmetică a numerelor a şi b să fie egală cu 10.

f) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^x*3^{x-1}=19$.

Varianta 086

Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-7$ şi $x\circ y=xy-7x-7y+56,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $7^x*7^{x+1}*7^{x-1}=43$.

d) Se consideră mulţimea $H=(7,+\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x*y\in H$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(x-1)\circ x<7$.

f) Să se calculeze $1*2*3*...*9$.

Varianta 087

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se găsească două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care $a*b\in\mathbb{Z}$.

c) Să se arate că $((x*y)*z)*t=x+y+z+t-3,\quad \forall x,y,z,t\in\mathbb{R}$.

d) Să se determine numărul real $p=1*2*3*...*2008$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}(2x+5)*(3y-1)=1\\(x-7)*(2y+3)=-2\end{cases}$.

f) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-2$. Să se arate că $f(x*y)=f(x)*f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Varianta 088

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziţie „$*$”este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$” pe $\mathbb{R}$.

d) Să se arate că $(\mathbb{R}\setminus\{3\},*)$ este grup comutativ.

e) Se consideră mulţimea $G=(3,+\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$, rezultă că $x*y\in G$.

f) Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ pentru care are loc egalitatea $x*x*x=2^n(x-3)^3+3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Varianta 089

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \perp y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $x \perp y = \frac{1}{2}(x-1)(y-1)+1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice că legea de compoziţie „$\perp$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Se consideră mulţimea $M = (1, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in M$, rezultă că $x \perp y \in M$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $5^x \perp 3^{x-3} = 1$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $(x+2) \perp (x-3) < 1$.

f) Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x \perp x \perp x = 2^n \cdot (x-1)^3 + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Varianta 090

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 3xy - 6x - 6y + 14, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * y = 3(x-2)(y-2) + 2$.

b) Să se arate că pentru oricare $x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $(1 * x) * 3 = 1 * (x * 3)$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$" definită pe $\mathbb{R}$.

d) Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid\ x * x = 3\}$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3 * \log_3 \left(x^2 - 7\right) = 2$.

f) Să se arate că $x = 3$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie „$*$".

Varianta 091

Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 4$ şi $x \circ y = xy - 4(x + y) + 20,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x \circ y - (x-4)(y-4) - 4,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că legea de compoziţie „$\circ$" este comutativă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\sqrt{u^2 + e^2}$, unde e este elementul neutru pe $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$", iar u este elementul neutru pe $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$".

e) Să se arate că are loc egalitatea $2 \circ (x * 3) = (2 \circ x) * (2 \circ 3),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

f) Să se calculeze $2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2$.

Varianta 092

Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6\ , \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că operaţia „$\circ$" este asociativă pe $\mathbb{Z}$.

b) Să se arate că $x \circ (\ y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

c) Să se demonstreze că nu există $u \in \mathbb{Z}$ pentru care $u \circ x = x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$.

d) Să se demonstreze că dacă $x \circ y = -2$, atunci $x = -2$ sau $y = -2$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuaţia $x^2 * x \le 2$.

f) Fie $a = x * x$ şi $b = x \circ x$. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\frac{a+b}{2} = -2$.

Varianta 093

Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = 2xy + 4x + 4y + 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Se consideră mulțimea $H = [-2, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$” pe $\mathbb{R}$.

d) Se dau mulțimile $A = \{x \in H \mid x^2 * 3x = 0\}$ şi $B = \{x \in H \mid x \circ x = 0\}$. Să se calculeze $A \cap B$.

e) Să se demonstreze că $(x * 1) \circ 2 = (x \circ 2) * (1 \circ 2), \forall x \in \mathbb{R}$.

f) Fie $a = x * x$ şi $b = x \circ x$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care media aritmetică a numerelor a şi b este negativă.

Varianta 094

Pe mulțimea $\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziție $x \perp y = xy - x - y + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x \perp y = (x-1)(y-1) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziție "$\perp$" nu este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) În mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ să se rezolve sistemul $\begin{cases} x \perp x = y \\ x \perp y = xy - 2 \end{cases}$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $[(2 \perp x) \perp 2] \perp x = 10$.

e) Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $x \perp x \geq 2$.

f) Să se determine două numere distincte $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încât $a \perp b \in \mathbb{Q}$.

Varianta 095

Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Fie $M = (1, +\infty)$. Să se arate că dacă $x, y \in M$, atunci $x * y \in M$.

c) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă pe M.

d) Să se determine $e \in M$, astfel încât $x * e = e * x = x$, $\forall x \in M$.

e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3 * x * 3 * x = 1$.

f) Să se determine numărul elementelor mulțimii $\{x \in \mathbb{R} \mid x * x = 5\} \cap \{-1, 0, 3, 11\}$.

Varianta 096

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice că $x * y = 2(x+1)(y+1) - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea „$*$” este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$” pe $\mathbb{R}$.

d) Să se arate că dacă $x * y = -1$, atunci $x = -1$ sau $y = -1$.

e) Fie x_1 şi x_2 soluțiile reale ale ecuației $x * x = 1$. Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.

f) Să se arate că $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ formează o structură algebrică de grup comutativ.

Varianta 097

Pe mulţimea $H=\{x\in\mathbb{N} \mid x$ este divizor al lui $12\}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=c.m.m.d.c.(x,y)$, $\forall x,y\in H$.

a) Să se precizeze elementele mulţimii *H*.

b) Să se arate că pentru oricare $x,y\in H$, rezultă că $x*y\in H$.

c) Să se verifice că $[(12*6)*4]*2=12*[6*(4*2)]$.

d) Să se rezolve ecuaţia $6*x=2$.

e) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$" este asociativă pe *H*.

f) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$" are element neutru pe *H*.

Varianta 098

Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x*y=ax+by-1$ şi $x\circ y=2xy-2x-2y+3$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, cu $a,b\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}^*$, astfel încât legea de compoziţie „$*$" să fie asociativă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x\circ y=y\circ x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

c) Pentru $a=b=1$ să se arate că oricare $x\in\mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie „$*$".

d) Să se găsească elementul neutru pe $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie „$\circ$".

e) Pentru $a=b=1$ să se arate că $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

f) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}x+1$. Să se demonstreze că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

Varianta 099

Pe mulţimea $H=\{x\in\mathbb{N}^* \mid x$ este divizor al lui $12\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=c.m.m.m.c.(x,y)$, $\forall x,y\in H$.

a) Să se precizeze elementele mulţimii *H*.

b) Să se întocmească tabla operaţiei „$\circ$".

c) Să se verifice că $[(12\circ 6)\circ 2]\circ 4=12\circ[6\circ(2\circ 4)]$.

d) Să se rezolve în *H* ecuaţia $x\circ 2=6$.

e) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$\circ$" are element neutru pe *H*.

f) Să se determine elementele simetrizabile din mulţimea *H*, în raport cu legea de compoziţie „$\circ$".

Varianta 100

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+x+y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $-(n*(-n))$ este pătrat perfect pentru oricare $n\in\mathbb{N}$.

b) Să se arate că legea de compoziţie „$*$" este asociativă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se studieze existenţa elementului neutru pe $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x*y=1+xy \\ x*x=y \end{cases}$.

e) Să se arate că orice element $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziţie „$*$"

f) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $\sqrt{x*x}=1$. Să se arate că $x_1*x_2\in\mathbb{Z}$.