Subiecte tip BAC

51 variante de subiect II, problema 2

LEGI DE COMPOZIȚIE

LEGI DE COMPOZIȚIE

selectate din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Problema 1

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este număr real.

c) Știind că operația „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ \cdots \circ 2008 \circ 2009$.

Problema 2

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se arate că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 11$.

c) Știind că operația ”$\circ$” este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2009}$.

Problema 3

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2009$.

Problema 4

2. Se consideră mulțimea $M = [k; +\infty) \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ și operația $x * y = xy - k(x+y) + k^2 + k$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $2 * 3 = 2$.

b) Pentru $k = 2$ să se rezolve în M ecuația $x * x = 6$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x * y \in M$.

Problema 5

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$.

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

c) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

Problema 6

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$.

a) Să se demonstreze că $x \circ (-x) = -1$, oricare ar fi x real.

b) Să se arate că legea de compoziție “$\circ$”este asociativă.

c) Să se calculeze $(-4) \circ (-3) \circ \ldots \circ 3 \circ 4$.

Problema 7

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a) Să se demonstreze că $x * y = 3(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numerele reale pentru care $(x^2 - 2) * 5 = -1$.

c) Știind că legea de compoziție este asociativă, să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \ldots * (-1) * 0 * 1 * \ldots * 2008 * 2009$.

Problema 8

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, oricare ar fi numerele reale a și b.

b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe M.

c) Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M.

Problema 9

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = x * x$.

b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 10

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2)+2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei

$$E = (-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2008 \circ 2009.$$

Problema 11

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy - 5(x+y) + 30$.

a) Să se demonstreze că $x * y = (x-5)(y-5)+5$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

c) Știind că legea de compoziție „$*$" este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

Problema 12

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$.

a) Să se rezolve ecuația $x * x = x$, unde $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

Problema 13

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + m$, unde m este număr real.

a) Să se arate că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

b) Să se determine m astfel încât $e = -6$ să fie elementul neutru al legii "$*$".

c) Să se determine m astfel încât $\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*m*\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$.

Problema 14

2. Pe mulțimea numerelor reale, se consideră legea de compoziție definită prin $x \circ y = xy - x - y + 2$.

a) Să se arate că legea “$\circ$” este asociativă.

b) Să se arate că, pentru oricare $x, y \in (1, +\infty)$, rezultă că $x \circ y \in (1, +\infty)$.

c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x \circ a = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

Problema 15

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.

a) Să se arate că $x * y = xy + (1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x * (1-x) = 0$.

Problema 16

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * 4 = 10$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * a = a * x = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea „$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009} * \frac{2}{2009} * \ldots * \frac{4018}{2009}$.

Problema 17

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice că $3 + 2\sqrt{2} \in G$.

b) Să se demonstreze că $x \cdot y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

c) Să se arate că orice element din mulțimea G are invers în G în raport cu înmulțirea numerelor reale.

Problema 18

2. Se consideră mulțimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

b) Știind că mulțimea G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

c) Să se arate că funcția $f:\mathbb{Z}\to G,\ f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ și $(G,\cdot)$.

Problema 19

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x\perp y=x+y+1$, $x\circ y=ax+by-1$, cu $a,b\in\mathbb{Z}$ și funcția $f(x)=x+2$. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$,

a) Să se demonstreze că $x\perp(-1)=(-1)\perp x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

c) Dacă $a=b=1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ și $(\mathbb{Z},\circ)$.

Problema 20

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2^{x+y}$.

a) Să se calculeze $2009\circ(-2009)$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x^2=64$.

c) Să se demonstreze că, dacă $(x\circ y)\circ z=2^{z+1}$, atunci $x=-y$.

Problema 21

2. Pe mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operația $x\circ y=x^{3\ln y}$.

a) Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x\circ e=8$, unde *e* este baza logaritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

c) Să se arate că operația „$\circ$” este asociativă pe mulțimea G.

Problema 22

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

a) Să se calculeze $x*0$.

b) Să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

c) Știind că $x_0\in\mathbb{Q}$ și $x_n=x_0*x_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, să se arate că $x_3\notin\mathbb{Q}$.

Problema 23

2. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se consideră operația $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

a) Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in G$.

b) Să se demonstreze că $x\circ y\in G,$ pentru $\forall x,y\in G.$

c) Să se arate că toate elementele mulțimii G sunt simetrizabile, în raport cu legea "$\circ$".

Problema 24

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x*5^x=11$.

c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$*$".

Problema 25

2. Se consideră mulțimea $G=(-1,1)$ și legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy},\ \forall x,y\in G$.

a) Să se rezolve în G ecuația $x*x=\dfrac{4}{5}$.

b) Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)},\ \forall x,y\in G$.

c) Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

Problema 26

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 1$.

a) Să se calculeze $2008 \circ 2009$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x^2 \le 3$.

c) Fie mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, n \ge 2 \text{ și } C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n + 6 \right\}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

Problema 27

2. Fie mulțimea $G = \left\{ a + b\sqrt{3} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$.

a) Să se verifice dacă 0 și 1 aparțin mulțimii G.

b) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in G$ avem $x \cdot y \in G$.

c) Să se arate că dacă $x \in G$, atunci $\dfrac{1}{x} \in G$.

Problema 28

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$".

c) Să se determine $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ astfel încât $C_n^2 \circ C_n^2 = 13$.

Problema 29

2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = 12$.

b) Să se arate că $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} (x-3) * y = 2 \\ (x-y) \circ 4 = 10 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 30

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + 11$.

a) Să se arate că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 6 ori } x} = 1$.

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}, \circ)$ este grup comutativ.

Problema 31

2. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

a) Să se calculeze $\dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{2}$.

b) Fie funcția $f : (-1, 1) \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. Să se verifice că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru oricare $x, y \in G$.

c) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

Problema 32

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = xy + 3x + ay + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$" să fie comutativă.

b) Să se arate că pentru $a = 3$ și $b = 6$ legea „$*$" admite element neutru.

c) Să se determine a și b astfel încât $(-3) * x = -3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Problema 33

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \perp y = (x-3)(y-3) + 3$.

a) Să se arate că $(x+3) \perp \left(\dfrac{1}{x} + 3 \right) = 4$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

b) Să se arate că legea „$\perp$" are elementul neutru $e = 4$.

c) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\perp$".

Problema 34

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = x + y + 3,\ x \circ y = ax + y - 3$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x + 6$.

a) Să se calculeze $(1 * 2) * (0 \circ 3)$.

b) Să se determine numărul întreg a pentru care legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

c) Pentru $a = 1$ să se arate că funcția *f* este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$.

Problema 35

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ (-4) \circ y = -4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $1 \circ (-2) \circ 3 \circ (-4) \circ 5 \circ (-6)$.

Problema 36

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ și $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.

a) Să se verifice că $(x * 2) - (3 \circ x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Știind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$*$” și e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „$\circ$”, să se calculeze $(e_1 * e_2) + (e_1 \circ e_2)$.

c) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + 1$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 37

2. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$

c) Să se arate că $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor .

Problema 38

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y - 14$.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 2$.

b) Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă.

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup comutativ.

Problema 39

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 10(x + y) + 110$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x - 10)(y - 10) + 10$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $C_{10}^1 \circ C_{20}^1$.

c) Să se rezolve ecuația $x \circ (x - 1) = 10$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Problema 40

2. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră operația $x \circ y = x^{2 \ln y}$.

a) Să se calculeze $3 \circ e$, unde e este baza logaritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x \circ y \in G$, pentru orice $x, y \in G$.

c) Să se arate că operația "$\circ$" este asociativă pe mulțimea *G*.

Problema 41

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7(x + y) + 42$.

a) Să se calculeze $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$.

b) Să se verifice că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea de compoziție „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

Problema 42

2. Se consideră mulţimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

a) Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G,\cdot)$.

c) Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{Z}\to G,\ f(x)=A_x$ este morfism de grupuri.

Problema 43

2. Pe mulţimea numerelor reale definim legile de compoziţie $x\circ y=x+y+3$ şi $x*y=xy-3(x+y)+12$.

a) Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3,$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x\circ(y-1)=0\\(x+1)*y=x*(y+1)\end{cases}$, cu $x,y\in\mathbb{R}$.

Problema 44

2. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=xy-x-y+2$.

a) Să se demonstreze că $x*y=(x-1)(y-1)+1,$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

c) Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*\ldots*\frac{\sqrt{2009}}{2}$.

Problema 45

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$.

a) Să se arate că $x*y=(x-6)(y-6)+6,$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x*x=x$.

c) Să se calculeze $1*2*3*\ldots*2009$.

Problema 46

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-\sqrt{2009}(x+y)+2009+\sqrt{2009}$.

a) Să se arate că $x*y=\left(x-\sqrt{2009}\right)\left(y-\sqrt{2009}\right)+\sqrt{2009}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$*$” este asociativă, să se calculeze
$\left(-\sqrt{2009}\right)*\left(-\sqrt{2008}\right)*\ldots*0*\ldots*\left(\sqrt{2008}\right)*\left(\sqrt{2009}\right)$.

Problema 47

2. Pe mulţimea numerelor întregi se consideră legile de compoziţie $x*y=px+y+2$, cu $p\in\mathbb{Z}$,
$x\circ y=x+y-2$ şi funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=3x+q$, cu $q\in\mathbb{Z}$.

a) Să se determine numărul real p astfel încât legea de compoziţie "$*$" să fie comutativă.

b) Pentru $p=1$ să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $(x*x)\circ(x*x)=x^2+2$.

c) Pentru $p=1$ să se determine numărul întreg q astfel încât funcţia f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ şi $(\mathbb{Z},\circ)$.

Problema 48

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

a) Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real x pentru care $\left(x^2-5\right)\circ 6=-1$.

c) Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

Problema 49

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.

a) Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4,$ oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$..

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=36$.

c) Ştiind că operaţia „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

Problema 50

2. Pe mulțimea mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Să se demonstreze că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

b) Să se determine simetricul elementului $x = -3$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

Problema 51

2. Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x * y = 3xy + 7x + 7y + 14$.

a) Să se determine elementul neutru al legii "$*$".

b) Să se rezolve mulțimea numerelor întregi inecuația $x * x \le -1$.

c) Să se demonstreze că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

SUCCES!