

Subiecte tip BAC

100 variante de subiect III, problema 2

100 probleme de analiză matematică tip BAC – clasa a XII-a

selecție din 100 variante BAC M2 – SNEE 2009

Problema 1

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Să se calculeze $\int_{-1}^0 x f(x) dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Problema 2

2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ și $F(x) = (x-1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$, pentru orice $x > 1$.

Problema 3

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2+x, & x > -1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, $x \in [0,2]$.

c) Să se calculeze $\int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx$.

Problema 4

2. Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

b) Să se determine numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx$.

Problema 5

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

b) Folosind faptul că $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(-x)$.

Problema 6

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x + 1$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$.

Problema 7

2. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1, +\infty)$.

c) Să se determine numărul real $a \in (1, e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane, determinate de graficul funcției f , axa Ox , dreptele de ecuații $x = a$ și $x = e^2$, să fie egală cu $\ln \frac{3}{2}$.

Problema 8

2. Se consideră funcțiile $f_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x) dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$.

Problema 9

2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x + 1} dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Folosind, eventual, faptul că $x^2 \leq x$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se demonstreze că $I_2 \leq I_1$.

c) Să se demonstreze că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 10

2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ și $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$.

a) Să se verifice că funcția g este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

Problema 11

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.

a) Să se calculeze $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$.

b) Să se verifice că $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$.

c) Să se arate că șirul care are termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$, $n \geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

Problema 12

2. Se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se verifice că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1 .

c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Problema 13

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ și $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a) Să se arate că $F(x) = -f(x) + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe \mathbb{R} .

c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

Problema 14

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1, +\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + x$ axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e$.

Problema 15

2. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \ln x$.

a) Știind că $g : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \ln x$, să se verifice că $\int g(x) dx = g(x) + C$, $x > 0$.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e x f(x^2) dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$.

Problema 16

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-x}f(x)$ axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx$.

Problema 17

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e x \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.

c) Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$.

Problema 18

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$.

a) Să se verifice că $I_0 = 1$.

b) Să se calculeze I_1 .

c) Folosind, eventual, faptul că $1 \leq \ln x \leq 2$ oricare ar fi $x \in [e, e^2]$, să se demonstreze că

$$1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Problema 19

2. Se consideră funcția $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[2; +\infty)$.

c) Să se determine a real, $a > 2$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției f , axa O și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = a$, să fie egală cu $\ln 3$.

Problema 20

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3^{-x}$.

c) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, +\infty)$.

Problema 21

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f + g$.

b) Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$.

c) Folosind eventual faptul că $2ab \leq a^2 + b^2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că

$$\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$

Problema 22

2. Se consideră funcția $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x) dx$.

b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.

c) Să se demonstreze că $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$, oricare ar fi $m \in [0, 2]$.

Problema 23

2. Se consideră funcțiile $f, F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ și $F(x) = (x+1) \ln x - x + 1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_1^2 f(e^x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x) dx = \frac{(3 \ln 2 - 1)^2}{2}$.

Problema 24

2. Fie $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$, pentru $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0 .

b) Să se arate că $I_1 = e^2$.

c) Să se demonstreze că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e(2^{n+1}e - 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Problema 25

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln x$ și $g(x) = x \ln x$.

a) Să se arate că g este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Problema 26

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m = 0$, $n = -3$, $p = 2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

b) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$, știind că $f'(-1) = f'(1) = 0$ și $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t) dt$.

Problema 27

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1004} + 2009^x$.

a) Să se determine $\int f(x) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe \mathbb{R} .

c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

Problema 28

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se determine $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx$.

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2e)$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e(e-1)$.

Problema 29

2. Se consideră integralele $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ și $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx$.

a) Să se verifice că $I + J = e - 1$.

b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $J \geq \frac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$.

Problema 30

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Utilizând, eventual, inegalitatea $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$, adevărată pentru orice $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$.

Problema 31

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.

Problema 32

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 xf(x^2) dx = \frac{e}{2}$.

Problema 33

2. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Utilizând faptul că $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0,1]$, să se arate că $I_{2009} \geq I_{2008}$.

c) Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$, adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.

Problema 34

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x \ln x$ și $g(x) = 2x + \ln x + 1$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g .

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x) dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Problema 35

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ și $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 (xf(x) + F(x)) dx = F(1)$.

Problema 36

2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2008} - x^{2009}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

c) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)g(x) dx < 1$.

Problema 37

2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ și $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$.

b) Să se demonstreze că $\int g(x) dx = f(x) + C$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$.

Problema 38

2. Se consideră $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0 .

b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

c) Să se demonstreze că are loc relația $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 39

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

b) Să se determine $a \in (0, 1)$ astfel încât $\int_{-a}^a f(x) dx = 1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 x f(e^x) dx$.

Problema 40

2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ și $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$.

a) Să se arate că $\int_1^4 f(x) dx = \ln 4 + 2$.

b) Să se verifice că $\int_1^4 g(x) dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x^2) \cdot g(x^2) dx$.

Problema 41

2. Se consideră funcțiile $f, F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ și $F(x) = x - \ln x$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_1^2 F(x) \cdot f(x) dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Problema 42

2. Se consideră funcțiile $f, g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ și $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g .

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) g(x) dx$.

c) Să se determine numărul real $a \in (1; +\infty)$ astfel încât $\int_1^a f(x) dx = 2$.

Problema 43

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei Ox , a graficelor funcțiilor $g, h : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ și $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.

Problema 44

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.

c) Să se arate că dacă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(2) - F(1)$.

Problema 45

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$.

a) Să se arate că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1 .

c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Problema 46

2. Se consideră funcțiile $f, g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ și $g(x) = x \ln x$.

a) Să se verifice că $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 + \frac{7}{3}$.

b) Să se arate că $\int_1^2 g(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

c) Să se arate că există $x_0 \in (1; 2)$ astfel încât $f(x_0) > g(x_0) + 3$.

Problema 47

2. Pentru oricare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

a) Să se determine $f_1(x)$, unde $x \in [0, \infty)$.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_1(x) \cdot \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_2(x)$, $x \in [0, 1]$.

Problema 48

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x f(x^2)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.

Problema 49

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ și $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$.

a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g .

b) Să se calculeze $\int_1^4 f(x) \cdot g(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x) dx = -1$.

Problema 50

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și $g(x) = x$.

a) Să se determine $\int f(\sqrt{x}) dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$.

c) Să se verifice că $\int_0^1 f(x^{50}) \cdot g^{99}(x) dx = \frac{e-1}{100}$.

Problema 51

2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 + 2x$ și $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{f(x) - x^2 - 2x}{e^x + 1}, \text{ axa } Ox \text{ și dreptele de ecuații } x = 0 \text{ și } x = 1.$$

Problema 52

2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e g(x) dx = 1$.

b) Folosind identitatea $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$, adevărată pentru orice $x > 0$, să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

c) Utilizând inegalitatea $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x \in [1, e]$, să se arate că $\ln \frac{e^2 + 1}{2} \geq \frac{e + 1}{e}$.

Problema 53

2. Se consideră funcțiile $f, g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ și $g(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

c) Să se arate că există $x_0 \in (0; 1)$ astfel încât $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0$.

Problema 54

2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ și $g(x) = f''(x)$.

a) Să se calculeze $\int_0^2 (x+1)f(x) dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

c) Să se determine primitiva funcției g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y = 2x$.

Problema 55

2. Se consideră funcția $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

a) Să se determine funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă pentru funcția f .

b) Să se demonstreze că funcția F este descrescătoare pe $[0, +\infty)$.

c) Să se demonstreze că $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 F(x) dx \leq \frac{1}{2}$.

Problema 56

2. Se consideră $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n(x^2+1)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x \neq 0$, să se determine I_1 .

c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Problema 57

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Să se calculeze $\int_0^1 (x-2)f(x)dx$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x (f(t)+2) dt$.

Problema 58

2. a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x} dx$.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$.

c) Se consideră funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și numerele reale pozitive a , b și c . Să se

demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x) dx$, $\int_1^b f(x) dx$, $\int_1^c f(x) dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a , b , c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Problema 59

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1 \\ 3x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive.

b) Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x) dx$.

c) Să se arate că, pentru orice $m \in [-1, \infty)$ aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , ax Ox și dreptele de ecuații $x = m$ și $x = m+1$ este cel puțin $\frac{5}{4}$.

Problema 60

2. a) Să se determine primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției

$$g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}.$$

c) Să se calculeze $\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)} dx$.

Problema 61

2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$.

a) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)(x+2)f(x) dx = \frac{22}{3}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Să se determine numărul real pozitiv k astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=k$ să fie egală cu $k + \ln k$.

Problema 62

2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = f(x)$.

c) Să se arate că dacă, $a > 0$, atunci $\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1}$.

Problema 63**Problema 64**

2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

a) Pentru $n=2$ să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

b) Pentru $n=-1$ să se determine $a \in [0; +\infty)$ astfel încât $\int_0^a f(x) dx = 0$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)f(x) dx$.

Problema 65

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^x$ și $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 e^{-x} f_1(x) dx = \frac{1}{2}$.

b) Să se calculeze I_1 .

c) Să se demonstreze că $I_n + nI_{n-1} = e$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Problema 66

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = e - 1$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e$.

Problema 67

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ și $F(x) = e^x + x - \ln x$.

a) Să se demonstreze că funcția F este o primitivă pentru funcția f .

b) Să se calculeze $\int_1^2 x(F(x) - x + \ln x) dx$.

c) Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ să fie egală cu $e^m - 2$.

Problema 68

2. a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t^2 + t + 1) dt}{x^3 + 1}$.

b) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , care verifică relația $F(1) = 0$.

c) Să se determine numărul real pozitiv a știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei O , a graficului funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ este egal cu 5π .

Problema 69

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2009} + x + 1$.

a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$.

b) Să se determine primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , care verifică condiția $F(0) = 1$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2010}}$.

Problema 70

2. Se consideră funcția $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

a) Să se verifice că $\int (x+1)(x+2) f(x) dx = x^2 + 3x + C$, $x \geq 0$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - f(x+1) - \frac{1}{x+1}$.

Problema 71

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x < 1 \\ (x+1)\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{6}$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției

$$h: [1; e] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{x+1}.$$

Problema 72

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .

b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

c) Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$, unde a, b, c sunt numere reale și funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

este o primitivă a funcției f , atunci numerele $F(a), F(b), F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Problema 73

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e f_1(\sqrt{x-1}) dx = 1$.

b) Să se determine primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1) = \frac{13}{15}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f_n(x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Problema 74

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x) dx$.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n , axa Ox și dreptele $x=1$, $x=2$.

c) Știind că F este o primitivă a funcției f_1 , să se arate că funcția $G: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \frac{5}{6}x$ este crescătoare.

Problema 75

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$.

Problema 76

2. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

Problema 77

2. Se consideră funcțiile $F, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot e^x$ și $f(x) = (x+1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx$.

Problema 78

2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ și $g(x) = x \cdot e^x$.

a) Să se determine $\int f(x) dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$.

Problema 79

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int_1^{\frac{1}{2}} (x+1) \cdot f_2(x) dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \ln 2$.

Problema 80

2. Se consideră funcțiile $f, F : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ și $F(x) = x + \frac{1}{x}$.

- a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .
- b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.
- c) Să se calculeze $\int_1^e F(x) \cdot \ln x \, dx$.

Problema 81

2. Se consideră funcția $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + 1$ să fie o primitivă a funcției f_a .
- b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x) \, dx$.
- c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^2(x) \, dx \geq \frac{1}{4}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Problema 82

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{x^n}$.

- a) Să se determine $\int f_1(x) \, dx$.
- b) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f_1(x) \, dx$.
- c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f_3(x)$.

Problema 83

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+2}$.

- a) Să se determine $\int f^2(x) \, dx$.
- b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2009} f(x) \, dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2010}$.

Problema 84

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

- a) Să se arate că funcția f admite primitive.
- b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(1; +\infty)$.
- c) Să se calculeze $\int_0^e f(x) \, dx$.

Problema 85

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^x + e^{-x}$.

- a) Să se determine $\int f(x) \, dx$.
- b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = x f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției g .

Problema 86

2. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x} \geq x$, pentru orice $x \in [0,1]$, să se arate că $\int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$.

Problema 87

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Să se determine $\int f(x) dx$, unde $x > 0$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f(x)$, $x \in [1,2]$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \ln x dx$.

Problema 88

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$.

a) Să se calculeze $\int f_0(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Problema 89

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^{1-x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x \cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx \geq 0$.

Problema 90

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f_2 .

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 91

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (2-x)^n$.

a) Să se determine $\int f_1(x) dx$, unde $x \in [0,2]$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x) \cdot e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f_5 .

Problema 92

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^n + 4x}$.

a) Să se verifice că $\int_1^4 f_1(x) dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

b) Să se calculeze $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)} dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$.

Problema 93

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

a) Să se determine $\int f_1(x) \cdot \sqrt{x+1} dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f_1 .

c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+1} \geq 1$, oricare ar fi $x \in [0; 1]$, să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x) \leq \frac{1}{2010}$.

Problema 94

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n + x + 2}{x+1}$.

a) Să se determine $\int x \cdot f_1(x) dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x) dx$.

c) Să se arate că aria suprafeței plane, cuprinse între graficul funcției f_{2008} și axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$, este mai mică sau egală cu 2.

Problema 95

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1-x$ și $g(x) = \sqrt{1-x}$.

a) Să se determine $\int f(x) dx$.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot \ln x dx$.

Problema 96

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Să se determine $\int f(x) dx$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2+1}$,

axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției

$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x)$, unde $x \in [0, 1]$.

Problema 97

2. Fie funcția $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

- Să se determine $\int f'(x) dx$.
- Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.
- Să se arate că $\int_1^e e^x f(x) dx \leq e^e - e$.

Problema 98

2. Fie funcția $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

- Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .
- Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .
- Să se calculeze $\int_1^2 f(x) \cdot \ln x dx$.

Problema 99

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.

- Să se calculeze $\int_0^1 (x+1) \cdot f(x) dx$.
- Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- Folosind faptul că $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f , este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$.

Problema 100

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^{n+1} + 1) \cdot e^x$.

- Să se determine $\int_0^1 f_0(x) \cdot e^{-x} dx$.
- Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x) dx + \int_0^1 f_{2010}(x) dx \geq 2 \int_0^1 f_{2009}(x) dx$.

SUCCES!