PROBLEME REZOLVATE

prof.Gheorghe Crăciun

CLASA a V-a

1 Fie $N = \underbrace{99\ldots9}_{112\ cifre} + \underbrace{99\ldots9}_{111\ cifre} + \cdots + 99 + 9$.

a) Demonstrați că N+113 se scrie doar cu cifra 1;

b) Demonstrați că N nu este pătrat perfect.

Adrian Vieriu, Suceava

Soluţie:

a) Se scrie $N + 113 = \underbrace{99\ldots9}_{112\ cifre} + 1 + \underbrace{99\ldots9}_{111\ cifre} + 1 + \cdots + 99 + 1 + 9 + 1 + 1$

$N + 113 = \underbrace{11\ldots1}_{113\ cifre}$.

b)Se deduce că ultima cifră a lui N este 8, deci N nu poate fi pătrat perfect.

2 Determinați numerele $x, y \in \mathbb{N}$ știind că $2^x + 3^y + 5^{x+3} = 3156$.

Gheorghe Marchitan, Suceava

Soluţie:

Dacă x≥3, atunci $5^{x+3} \geq 15625$. Rămâne că $x \in \{0; 1; 2\}$

Se analizează cele trei cazuri.

Se obține soluția x=2 și y=3

3 Să se arate că oricare ar fi numărul $a \in \mathbb{N}$, există numerele $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$ astfel încât $2014/(a^m - a^n)$.

Vasile Solcanu, Suceava

Soluţie:

Dacă $a \in \{0; 1\}$, $a^m - a^n = 0$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ și divizibilitatea este evidentă.

Dacă $a \in \mathbb{N}$, a≥2, considerăm numerele naturale distincte $a^1; a^2; a^3; \ldots a^{2015}$.

Conform principiului cutiei există printre acestea două numere $a^m \neq a^n$ care să dea același rest la împărțirea cu 2014.

Deci există $m \neq n$ pentru care $2014/(a^m - a^n)$.

4 Arătaţi că numărul b=1·2·3·…·100 nu este pătrat perfect.

***

Soluţie:

Acest produs conţine factor prim pe 97 care apare o singură dată şi deci nu-l conţine pe 97^2, de aceea numărul dat nu poate fi pătrat perfect.

.

5 Se consideră două numere naturale astfel încât suma dintre dublul primului număr şi triplul celui de-al doilea este 2488. Împărţind primul număr la sfertul celui de-al doilea, obţinem câtul 3 şi restul 2. Aflaţi cele două numere.

(*Argeş, et. locală*)

Soluţie:

Fie a şi b cele două numere ⇒ 2a+3b=2488. Notăm sfertul lui b cu x, atunci b=4x şi conform teoremei împărţirii cu rest a=x·3+2, r< x ⇒ 2(x·3+2)+3·4x =2488⇒ 6x+4+12x=2488 ⇒ 18x=2484 ⇒ x=138 ⇒ b=552 şi a=416Deci

A={2112,3223,4334,5115,5445,6226,6556,7337,7667,8448,8778,9559,9889}

6.Să se determine suma tuturor resturilor împărţirilor la 10 ale numerelor naturale n, cu proprietatea 0≤n≤2009.(Bucureşti, et. locală)

Soluţie:

Resturile posibile la împărţirea cu 10 sunt 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 cu suma 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. Cum 0≤n≤2009 rezultă că sunt 2010 numere şi 2010:10=201, atunci suma este $201\cdot 45=9045$.

CLASA a VI-a

1. Să se determine numerele naturale a şi b, ştiind că $2^{3a}-2^{3b}=\overline{xyz}$ şi $\overline{xyz}$ este număr impar.

O.L.M. Mures

Soluţie:

Daca $\overline{xyz}$ este numar impar, atunci $2^{3b}=1 \Rightarrow 2^{3b}=2^0 \Rightarrow 3b=0 \Rightarrow b=0$.

Rezulta ca $2^{3a}-1=\overline{xyz} \Rightarrow (2^3)^a-1=\overline{xyz} \Rightarrow 8^a-1=\overline{xyz}$.

Pentru $a=3$ obtinem $8^3-1=512-1=511$, $a\le 2$ obtinem $8^2-1=64-1=63$, nu este de trei cifre $a\ge 4$ obtinem $8^4-1=4095$, are mai mult de trei cifre **.**Rezulta ca singura solutie este $a=3$ si $b=0$.

2. Să se determine numerele prime a, b, c ştiind că

$$a\cdot (a+1)+b^c=184.$$

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Deoarece a şi a + 1 sunt numere consecutive rezultă că $a\cdot (a+1)$ este un număr par şi cum 184 este tot un număr par, rezultă că şi b^c trebuie să fie par, adică b trebuie sa fie par şi cum b este un număr prim, rezultă că b = 2. Aşadar

$$a\cdot (a+1)+2^c=184.$$

Se observă că dacă c > 7, vom avea $2^c>2^8=256>184$, prin urmare c prin urmare

$$c\in\{2, 3, 5, 7\}$$

Dacă c = 2 se obţine $a\cdot (a+1)=184-4=180$, care nu se poate scrie ca produsul a două numere consecutive.

Dacă c = 3 se obţine $a\cdot (a+1)=184-8=176$, care nu se poate scrie ca produsul a două numere consecutive;

Dacă c = 5 se obţine $a\cdot (a+1)=184-32=152$, care nu are soluţii;

Dacă c = 7 se obţine $a\cdot (a+1)=184-128=56=7\cdot 8$, prin urmare a = 7

Aşadar soluţia este a = 7, b = 2 c = 7.

3. Să se arate că nu există numere naturale x şi y pentru care expresia 7x + 13y să fie divizibilă cu 17 iar 4x + 5y = 2013.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Dacă $7x + 13y \vdots 17$ atunci $3\cdot (7x + 13y) \vdots 17$ de unde $21x + 39y \vdots 17$, expresie care se scrie sub forma $17x + 34y + 4x + 5y \vdots 17$ şi cum $17x + 34y \vdots 17$ rezultă că şi $4x + 5y \vdots 17$ şi deoarece $4x + 5y = 2013$ rezultă că $2013 \vdots 17$ ceea ce este fals deoarece $2013 = 3\cdot 11\cdot 61$.

Prin urmare nu există numere natural x şi y care să verifice simultan cele două relaţii

---

4. Să se arate că numărul $a = 2^{2013} + 2^{2012} + 29\cdot 2^{2007}$ este cub perfect.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie: Numărul a se scrie sub forma :

$a = 2^{2007} \cdot (2^6 + 2^5 + 29)$

$a = 2^{3\cdot 669} \cdot (64 + 32 + 29)$,

$a = (2^{669})^3 \cdot 125$

$a = (2^{669})^3 \cdot 5^3$, de unde

$a = (2^{669} \cdot 5)^3$ adică a este cub perfect.

---

5. Un număr de trei cifre are primele doua cifre identice, iar a treia cifră este 5.Acest număr se împarte la un număr de o cifră şi se obţine restul 8. Să se găsească deîmpărţitul, împărţitorul şi câtul.

O.L.M Mures

Solutie

$\overline{aa5} = b\cdot c + 8$, 8<b, b cifra $\Rightarrow b = 9$

$110a + 5 = 9c + 8$

110a=3(3c+1) $a \in \{3,6,9\}$

c = 73 (catul) $\overline{aa5} = 665$ (deimpartitul).

---

6. Determinaţi *a*, *b* şi *c*, numere naturale prime pentru care este adevărată relaţia:

$$4a + 5b + 8c = 170.$$

O.J.M Mures

Soluţie

4a + 8c şi 170 sunt pare, atunci 5b este par, adică b este prim-par, adică b = 2.

4a + 8c = 170 – 10; a + 2c = 40, adică a este prim- par, adică a = 2.

2c = 40 – 2; c=19.

---

7. Împărţind numerele naturale a, b, c la numărul natural nenul n obţinem câturile 2, 3 respectiv 4 şi resturile egale cu 0.

a) Să se arate că numărul $N=(a^2+4)\cdot(b^2+9)\cdot(c^2+16)$ este divizibil cu 576.

b) Să se determine a, b, c ştiind că $c^3 - b^3 = 296$.

O.L.M. 2010, Iaşi

Soluţie : a = 2n, b = 3n, c = 4n.

a) $N = (4n^2+4)\cdot(9n^2+9)\cdot(16n^2+16) = 4\cdot 9\cdot 16\cdot (n^2+1)^3 = 576\cdot (n^2+1)^3$.

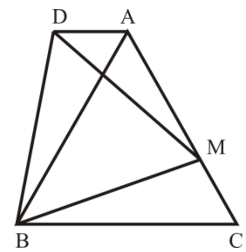
b) $c^3 - b^3 = 64n^3 - 27n^3 = 37n^3 = 296 \Leftrightarrow n^3 = 3 \Leftrightarrow n = 2 \Rightarrow a = 16; b = 24; c = 32$.

1. **CLASA a VII-a**

Pe latura AC a triunghiului echilateral ABC se consideră punctul M şi se construieşte triunghiul echilateral BMD astfel încât punctele D şi M ă fie de o parte şi de alta a dreptei AB. Să se demonstreze că [DA] ≡ [CM] iar DA || BC.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie



Din ipoteză avem că: m(∢DBA) + m(∢ABM) = 60° iar m(∢CBM) + m(∢ABM) = 60° de unde rezultă că ∢DBA ≡ ∢ CBM.
Avem Δ ABD ≡ Δ CBM ([AB] ≡ [CB], ∢ABD ≡ ∢ CBM, [BD] ≡ [BM]) de unde rezultă că [DA] ≡ [CM] iar m(∢ BAD) = m(∢ BCM) = 60° şi cum m(∢ABC) = 60° se obţine că ∢BAD ≡ ∢ ABC şi cum ele sunt alterne interne rezultă că AD || BC.

---

2. Se dă suma $S=\frac{2009}{1\cdot 3}+\frac{2009}{3\cdot 5}+\frac{2009}{5\cdot 7}+...+\frac{2009}{2007\cdot 2009}$. Să se arate că:

a) $S\in \mathbb{N}$

b) să se determine x ştiind că $x+S=2010$.

O.L.M. 2010, Iaşi

Soluţie : **.** a)Scrie $S=2009\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{2007\cdot 2009}\right)$

Află $2S=2009\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2009}\right)\Leftrightarrow 2S=2009\left(1-\frac{1}{2009}\right)$

$S=\frac{2009\cdot 2008}{2009}\cdot\frac{1}{2}=1004\in N$

b) $x+1004=2010\Leftrightarrow x=2010-1004\Rightarrow x=1006$

---

3. Se poate exprima 2010 ca o diferenţă de două pătrate de numere întregi?

O.L.M. 2010, Olt, Gheorghe Ştefana

Soluţie: Ar trebui să avem: 2010 $= a^2 - b^2$, $a,b \in Z$
Deci 2010= (a – b)(a + b).
Avem doua cazuri.
Cazul 1 : Daca a şi b au aceeaşi paritate $\Rightarrow (a-b)\vdots 2$ şi $\Rightarrow (a+b)\vdots 4$,deci $\left(a^2-b^2\right)\vdots 4$,
dar 2010 nu este divizibil cu 4. Deci egalitatea este imposibilă.
Cazul 2 : Dacă a şi b au parităţi diferite, atunci a^2-b^2 este un număr impar, dar 2010 este par. Deci egalitatea este imposibilă
Concluzie : Nu exista a ,b ∈ **Z** astfel încât $a^2 - b^2$ =2010

4. Să se arate că suma pătratelor a patru numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect.

Daniela Badea, Ploieşti

Soluţie: Fie $n-1,\ n,\ n+1,\ n+2$ cele patru numere naturale consecutive. Avem:

$$S=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4=4n^2+4n+6=$$

$$=2\left(2n^2+2n=3\right)=2\left[2\left(n^2+n+1\right)+1\right]=2\cdot(2k+1).$$

Deci suma S se divide cu 2, dar nu se divide cu 2^2 şi deci nu poate fi pătrat perfect.

5. Să se determine numerele reale nenule a, b, c ştiind că

$$a+\frac{1}{bc}=2b,\ b+\frac{1}{ac}=2c\ si\ c+\frac{1}{ab}=2a$$

Mara Ilie, Romeo Ilie, O.L.M. 2010, Braşov

Soluţie : Metoda I . Fie $x=a+\frac{1}{bc}$, $y=b+\frac{1}{ac}$ şi $z=c+\frac{1}{ab}$.

Avem $\frac{x}{a}=1+\frac{1}{abc}$, $\frac{y}{b}=1+\frac{1}{abc}$ şi $\frac{z}{c}=1+\frac{1}{abc}$ şi deci

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2\ .$$

Aşadar, x = 2a, y = 2b, z = 2c. Deducem a = b = c şi apoi a = b = c = 1.

Metoda II . Adunăm ecuaţiile şi obţinem a + b + c = $\frac{a+b+c}{abc}$

Cazul I: abc = 1. Rezultă a = b = c = 1.

Cazul II: a+b+c = 0. Avem abc+1 = $2b^2c = 2c^2a = 2a^2b$, de unde rezultă că a, b, c au acelaşi semn, deci a + b + c < 0 sau a + b + c > 0. Fals.

Clasa a VIII-a

1. Fie O , A , B , C puncte necoplanare . Dacă $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2=ax+by+cz$, atunci arătaţi că :

$$m\prec(AOB)+m\prec(AOC)+m\prec(BOC)=180^\circ\ .$$

O. M. – faza locală Dâmboviţa – 2006

Demonstraţie :

Folosind relaţiile din ipoteză avem :

$$x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2ax-2by-2cz=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0\ \Rightarrow\qquad \begin{array}{l}(x-a)^2=0\Rightarrow x=a\\ (y-b)^2=0\Rightarrow y=b\\ (z-c)^2=0\Rightarrow z=c\end{array}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \Delta AOB\equiv\Delta OBC\equiv\Delta CAO\ \text{(L.L.L)}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle OAC \\ \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle ACO \\ \sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle BCO \equiv \sphericalangle AOC \end{matrix} \Rightarrow$$

$$m\sphericalangle(AOB)+m\sphericalangle(AOC)+m\sphericalangle(BOC)=m\sphericalangle(AOB)+m\sphericalangle(ABO)+m\sphericalangle(OAB)=180^\circ$$

2. a) Într-un triunghi MNP, lungimile laturilor sunt mai mici decât 2 . Arătaţi că lungimea înălţimii corespunzătoare laturii MN este mai mică decât $\sqrt{4-\frac{MN^2}{4}}$.

b) Într-un tetraedru $ABCD$, cel puţin 5 muchii au lungimi mai mici decât 2 . Arătaţi că volumul tetraedrului este mai mic decât 1 .

O. M. – faza naţională – 2007

Demonstraţie :

a) Lungimea înălţimii corespunzătoare laturii MN este mai mică sau egală decât lungimea medianei corespunzătoare laturii MN $\Rightarrow$ $h \le m_P$.

Folosind teorema medianei $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m_P^2=\frac{MP^2+NP^2}{2}-\frac{MN^2}{4}<\frac{4+4}{2}-\frac{MN^2}{4}=4-\frac{MN^2}{4} \Rightarrow h<\sqrt{4-\frac{MN^2}{4}} .$$

b) Considerăm laturile triunghiurilor ACD şi BCD mai mici decât 2 şi notăm CD = a < 2.

Fie $BM \perp CD$, $M \in CD \Rightarrow$ (cf. pct. a)

$$\Rightarrow BM<\sqrt{4-\frac{a^2}{4}} .$$

În ΔACD , fie $AN \perp CD$, $N \in CD \Rightarrow$

(conform punctului a)) $AN<\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$.

Fie AP – înălţimea din A a tetraedrului $\Rightarrow$ $AP \le AN$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot A_{\Delta BCD}\cdot h_A<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}=\frac{a(16-a^2)}{24} .$$

Trebuie să arătăm că : $\frac{a(16-a^2)}{24}<1 \Leftrightarrow 16a-a^3<24 \Leftrightarrow a^3-16a+24>0$

$\Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a-12)>0$.

$$\left.\begin{array}{r} a<2 \Rightarrow a-2<0 \\ a^2+2a-12<4+4-12<0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a-2)(a^2+2a-12)>0 \Rightarrow$$

3.Arătaţi că $\frac{n-1}{n^3-1}+\frac{n-2}{n^3-2^3}+...+\frac{n-(n-1)}{n^3-(n-1)^3}<1$, oricare ar fi n$\in N$ -{0 ;1}.

Cătălina Isofache, Ploieşti

Soluţie: $\frac{n-k}{n^3-k^3}=\frac{1}{n^2+nk+k^2}<\frac{1}{n^2+k^2}\leq\frac{1}{n^2+1}$. Însumând cele (n-1) fracţii , obţinem $\frac{n-1}{n^3-1}+\frac{n-2}{n^3-2^3}+...+\frac{n-(n-1)}{n^3-(n-1)^3}<\frac{n-1}{n^2+1}<1$.

4.Să se determine x din ecuaţia

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+ \quad ... \quad +\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{2013}{1007}$$

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Deoarece 1 + 2 + 3 + … + x = $\frac{x\cdot(x+1)}{2}$, ecuaţia de mai sus se scrie sub forma

$\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{2\cdot3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot4}{2}}+ \quad ... \quad +\frac{1}{\frac{x\cdot(x+1)}{2}}=\frac{2013}{1007}$, sau încă

$\frac{2}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+ \quad \frac{2}{x\cdot(x+1)}=\frac{2013}{1007}$, de unde se obţine

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+ \quad ... \quad +\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{2013}{2014}$ şi cum $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, se obţine

$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+ \quad ... \quad +\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2013}{2014}$,

si prin reducerea termenilor se găseşte $1-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{2014}$.

Aşadar x + 1 = 2014, de unde x = 2013.

RUBRICA REZOLVITORILOR:
Realizată de Luminița Corneci

Colegiul Naţional „Ion Luca Caragiale" Ploieşti, Prof Niță Cristian :Jalbă Bianca 45, Chivu Andreea 45, Popa Vlad Constantin 60, Udrescu Alexandru Mihai 50, Chirilă Cezara 50, Mihai Ana Maria 75, Ștefan Alexandra Nicoleta 60, Ghiţă Elena Diana 80, Ionescu Cristian 50, Dobre Maria 95, Tace Olivia 80, Mărăcineanu Narcisa 50, Toma Andra Cristina 95, Zincă Ruxandra 80, Bratu Andra 95, Simion Petruș 70, Mihai Teodora 70, Stoian Natalia 95, Cozea Vera 100, Păunoiu Darius 50
Prof. înv. pr. Baroianu Aida: Agba Andrei 19, Albu Filip 19, Avram Daria 19, Barbu Antonia 19, Banariu Maia 19, Bega Ilinca 19, Burlacu Antonio 19, Diaconescu Karla 19, Dicu Daria 19, Dinu Liviu 19, Dinu Vlad 19, Dobleagă Alexandru 19, Dumitru Serghei 19, Gheonea Andrei 19, Gheorghe Alessia 19, Ghita Andreea 19, Iordache Luca 19, Marinescu Mara 19, Mihalache Maria 19, Mocanu Daria 19, Panait Daria 19, Pandele Dinu 109, Pomojnicu Alexandra 19, Popescu Alexandra 19, Preda Luca 19, Sava Darius 19, Simionov Luca 19, Sireteanu Mihai 19, Stanciu Andrei 19, Stănila Bianca 19, Stoenescu Daniela 19, Şerban Teodor 19, Moise Raluca 19, Petrescu Filip 19, Toma Mathias 19, Popescu Alexandru 19. **Prof. înv. pr. Barlaboi Ioana:** Stroe Matei 37.

Colegiul Naţional „Al. I. Cuza" Ploieşti, Profesor Isofache Cătălina: Borlovan Ingrid 9; Chivu Alexandru Andrei 9; Cornescu Darius Constantin 9; Dragomir Victor Lucian 9; Dumitrescu Teodora Cristina 9; Grigore Pavel Norocel 9; IonescuAndreea Aliana 9; Iorga Vlad Andrei 9; Megelea Ana Maria 9; Neagu Alexia Florentina Ioana 9; Nedelcu Denis Valentin 9; Paraschiv Cosmin Andrei 9; Stefan Sabina Ioana 9; Stefanescu Maria Luciana 9; TigauPetru 9; Vasile Dana Irina 9; Vlad Andrei Flavian 9; Voicu Irina Stefania 9; Aga Teodora Mihaela 9; Babarus Ioana 9; Badea Delia Alexandra 9; Bran Larisa Simona 9; Ciurca Andrei Alexandru 9; Ilie Ana Maria 9; Iliescu Maria 9; Iordachescu Maria Carla 9; Mares Ioana Catalina 9; NeaguMara Stefana 9; Nichifor Ioana Bianca 9; Sandu Anastasia Georgiana 9; Sandu Ioana 9; Sandu Andreea Cristina 9; Stan Florina Valentina 9; Alexandru Mădălina Elena 9; Andrei Raluca Alexandra 9; Gavrila Ioana Alexandra 9; Gheorghiu Diana Alexandra 9; Grigore Roxana Ioana 9; Istrate Ioana 9; Neagu Andreea Roberta 9; Musatoiu Raluca Andreea 9; Paiu Georgiana 9; Mihalcea Gabriela 9; Neagu Andreea Roberta 9; Nicolae Ioana Madalina 9; Parvu Ana Maria 9; Sanda Horia 9; Amarandei Diana Andreea 9; Baluta Teodora 9; Bita Laurentiu Andrei 9; Dinu Bianca Georgiana 9; Dinu Mihnea Alexandru 9; Esanu Valeria Bianca 9; Georgescu Haiganus Ana 9; Goldis Carla Ivona 9; Gomoescu Raluca Elena 9; Grigore Ioana Diana 9; IbaFlorentin Danie lMateescu Razvan 9; Neagu Oana Luciana 9; Pauna Andreea Alexandra 9; Popescu Alexandra Cora Cristiana 9; Popescu Matei George 9; Popa Costin Emilian 9; Stoianovici Adrian 9; Teodorescu Andrei Calin 9; Toma George Tiberiu 9; Tudoran Radu Mihai 9; Ursulescu Ioana Teodora 9; Vasile Radu Alexandru 9; Visan Mihai Damian 9; Vladut Alina Violeta 9. **Prof. Mihalache Daniela:** Dumitru Teodora 10; Tătulescu Larisa 14; Aldea Ștefan 10; Asanache Victor 13; Barbu Daniela 10; Boboșilă Sergiu 13; Bontaș Vlad 11; Burlacu Ana Maria 10; Catană Indra 16; Dedu Ștefan 10; Dumitrașcu Octavian 10; Iliescu Diana 10; Ion Alexandra 10; Mihalache Vlad 10; Munteanu Andrei 10; Niculeanu Minodora 10; Petrișor Mihai Alexandru 10; Tudor Cristina 10; Voicu Alexa 12; Crafcenco Andreea 8; Dima Marina 11; Epure Ioana 8; Filote Mihai 8; Ghica Mădălina 8; Lazăr Anca 8; Mihăilă Manuela 8; Olaru Andra 5; Pascale Ionela 8; Tudor Alexandra Mariana 8; Vasilescu Rareș

4; Vizireanu Adrian 8, Stroe Teodora 20. Ciudin Filip 15, Dincă Raluca 11, Rajac Bianca 10, Ganţă Andrei Gabriel 11, Ioniţă Ştefania 10, Păun Andreea Alexandra 10. **Prof. Vasile Magdalena:** Stanciu Octavian 9**,**Anca Mihai 8.

Colegiul National „Jean Monnet” Ploieşti, Prof. înv. pr. Camelia Poenaru: Busuioc Ruxandra 30, Drăgoi Teodora 30, Enache Răzvan 30, Ene Rareş 30, Enescu Maria 30, Goran Paul 30, Hagineagu Teodor 30, Hanciuţa Alexandru 30, Ilie Nistor Ericka 30, Iordache Bianca-30, Lupaşcu Cecilia 30, Nae Ştefan 30, Perju Ştefan 30, Săvulescu Denisa 30, Scarlat Mihai 30, Stoica Mara 30, Ţuclea Maria 30. **Prof. înv. pr. Baban Marilena** Toma Teodora 30, Vlad Amalia 30, Şolea Andrei 30, Sărăţeanu Alexandra 30, Roman Ştefan 30, Popescu Denis 30, Pătraşcu Iustin 30, Panait Raluca 30, Nedelea Octavian 30, Neagu Răzvan 30, Neagu Mara 30, Mocanu Bogdan 30, Mihăilă Daria 30, Micu Teodora 30, Manta Ştefania 30, Ivan Ania 30, Ionescu Violeta 30, Ghinoiu Rareş 30, Florea Ştefan 30, Drăguşin Daria 30, Drăgoi David 30, Drăghici Nikolas 30, Dragomir Alexia 30, Dinulescu Ioana 30, Dima Denis 30, Dicu Dennis 30, Costăchescu Patricia 30, Constantin Vlad 30, Constantin Alessia 30, Ciuranu Eduard 30, Ceapchie Francesco 30, Căţoiu Adrian 30, Burlacu Andrei 30, Bordei Ema 30, Anghel Rareş 30, Aivaz Ender 30.

Şcoala Gimnazială „Sf. Vineri” Ploieşti, Prof. Crăciun Gheorghe: Mîndăianu Victor 10, Mihalache Răzvan 4, Crăciun Paul 13, Gheorghe Alexandru 10, Popovici Alexandru 20, Filipescu Ana Maria 6, Gavriluţă Bogdan 7, Dumitrache Cătălin 7, Stroe Stefan 15, Moise Cosmin 15. **Prof. Georgescu Raxana:** Ioniţă Theodor 15, Gheorghe Mircea 15, Dumitrascu Elena 14 **prof. înv. pr. Mihaela Simion:** Călin Sara 17; Biricov Alexandra 16; Cîrstea Lydia 17; Cismaru Alexandra 17; Dăncescu Maia 17; Dor Natali 10; Dumitrescu Andreea 17; Dumitru Darius 17; Ene Ionuț 10; Eftimie Teodor 17; Ilie Adina 17; Ioniță Maria 17; Jula Mihai 17; Marin Ștefan 17; Marinescu Lucian 10; Munteanu Tudor 10; Nicula Andrei 17; Pană Călin 17; Savu Mihai 17; Simion Elena 17; Stere Teodor 17; Stoica Irina 17; Ștefan Laurențiu 14; Tănase Alessia 12; Ușurelu Rianna 17; Zamfir Giulia 17; Zamfir Vlăduț 17.

prof. înv. primar. Pană Georgeta - Raluca: Ardeleanu Dennis 50, Baciu Sara 50, Bran Ioana 50, Cardașol Luca 50, Constantin Armand 50, David Alexandru 50, Dumitru Alexandra 50, Ene Daria 50, Enescu Rianna 50, Herghelegiu Ioana 50, Iacob Teodora 50, Iliescu David 50, Ion Teodora 50, Ion Melania 50, Ionescu Bogdan 50, Ionescu David 50, Jercan Darian 50, Maniu Stefan 80, Matache Mihnea50, Moise Andreea 50, Moiseanu Daria 50, Nițu Emma 50, Panait Cristian 50, Pauna Aris 50, Peltea Raluca 50, Petre Alexandru 50, Predoiu Mihai 50, Sărățeanu Cristiana 50, Stoica Bianca 50, Șuț Teodosie 50, Tănăsescu Sebastian 50, Toma Anastasia 50, Vasile Rareș 50, Vintilă Andrei 50, Zahiu Alexia 50.

Prof. înv. pr. Georgiana Dumitrescu: Samoila Luca Alexandru 12, Stefan Sara Maria Daniela 12, Radu Briana 12, Ene Alessia 13, Ciocianu Bianca 12, Baciu Mario Alexandru 12**,** Neagu David Alin 12, Necula Andrei 13.

Şcoala Gimnazială „Sf. Vasile” Ploieşti, Prof. înv. pr. Brejan Maria: Armaczki Adriana - 10, Aurelian Danny 20, Braslasu Amalia 10, Curte Alexia 30, Curte Daria 30, Dica Diana 30, Dragomir Mateo 20, Draghiceanu Rares 30, Dumitrescu Smaranda 30, Filoneanu Toni 40, Fraraccio Giorgia 10, Hamunga Damian 20, Matei Radu 40, Minea Diana 30, Mircioiu Bogdan 10, Neagu Laura 30, Neamtu Alexandra 30, Nica Sebastian 30, Nica Roxana 20, Patrascu Mara

40, Pescaru Miruna 10, Ploscaru Clara 10, Popa Alexandru 10, Persinaru Ioana 40, Rotaru Carla 30, Spatarelu Maria 40, Tita Andrei 40, Toma Codrin 10, Tutu Ana Maria 15. **Prof. înv. pr. Vezeteu Loredana:** Stoian Teodora 40

Şcoala Gimnazială „H.M. Berthelot” Prof. Musat Claudia: Lisman Diana 15, Zinca Irina 20, Gheorghe Mihai 10, Prisacaru Andrei 10, Damian Nicola 10, Nicolae Andreea 15, Barbieru Raluca 10, Dragomir Diana 15, Berlea Cristiana 15, Neagu Andrei 10, Cecel Sebastian 10, Bogdan Sergiu 10, Enescu Deny 10, Matei Stefania 15, Constantinescu Maria 15, Sandu Maria 10, Voicu Iulia 10, Stefan Claudia 10, Vasile Ioana 10, Gheorghe Alexandra 10, Vrabie Paula 10, Petcu Alexandru 10, Stoica Bianca 10, Bahmata Miruna 10, Pop Cristian 10, Stanescu Andrei 10, Cursaru Andrei 10, Georgescu Alexandru 10, Wolf Robert 10, Ilie Ionut 10, Licsandru Costin 10, Daitoiu Stefan 10, Covaci Mihaela 10, Oprea Beatrice 10, Girbea Mihai 10, Cucu Denisa 10, Ilie Maria 10.

Şcoala „I.A. Bassarabescu”, Ploieşti, jud. Prahova, prof. înv. pr. Stroe Amalia
Ionașcu Răzvan- 30, **Pintescul Mihai**-23, Cruceru Maia 26

Şcoala Gimnaziala „George Emil Palade” Ploieşti, Prof. inv. primar Cristina Soare: Albu Teodor 10, Bercu Patricia 10, Mihaila Bianca 10, Mihaila Irina 10, Dumitrescu Silviu 10. **prof. inv. pr. Tudorache Maria:** Anghel Cosmin 35, Draghici Raluca 31, Cojocea Ana-Maria 29.

Şcoala Gimnazială „Nicolae Iorga” Ploieşti, Inv. Constantin Dana Mihaela: Cobzaru Andi 37. **Prof. înv. pr. Gheorghe Adriana:** Ionita Alexio 20,Napcori Anthony 20, Poterasoiu Adela 20,Udrea Daria 20,Anghel Robert 20,Fota Alexia 20,Sandu Patricia 20,Lazar Andreea 20,Neacsu Mateea 20, Zorca Anne-Marie 20. **Prof. înv. pr. Dobrin Mirela**: Anca Davide 30,Anghel Mihai 10,Banciu Bianca 30,Barbu Carina 20,Bartoş Lorena 30, Bucur Diana 30, Călugăreanu Tabitha 10, Constantin Beatrice 30, Constantin Ianis 30, Contescu Alexandra 30, Damian Eduard 30, Dumitrescu Bogdan 30, Florea Ştefania 30, Grăniceru Daria 40, Herţanu Roxana 30, Iosub Teodora 30, Mihalache Alesia 30 , Mihai Alexia 30, Mitrea Radu 30, Niculescu David 20, Nistor Sasha 30, Neagu Dragoş 30, Negoiţă Erika 30, Popp Andrei 30, Pospai Diana 30, Stan Ioana 10, Rădoiu Mihai 10, Săndulache Robert 10, Tarcău Mihai 30, Vladimirescu Mara 30.

Şcoala Gimnazială „Profesor Nicolae Simache” Ploieşti, Prof. înv. pr. Dumitrescu Luminiţa: Radu Diana Andreea 41; Dăscălescu Ondina Ștefania 41; Negoiţă Elena Daniela 41; Popescu Cristian 40; Ţiplea Daria Cristiana 38; Ifrim Cristina Gabriela 25; Enache Maria Ruxandra 34; Paraschiv Maria Cristina 26; Muscă Bogdan 25; Chiriac Antonio 33; Rădulescu Bianca Ioana 33; Avramescu Vlad 33; Başturea Adina Maria 32; Şeicăreanu Robert Lucian 28; Anghelache Roberta Andreea 27; Petre David Ştefan 26; Plăişanu Rareş Ştefan 10.

Şcoala Gimnazială „Ing. Gh. Pănculescu” Vălenii de Munte, Prof. înv. pr. Fătu Sevasta: Vîrjoghe Maria Cristina 30, Rădulescu Maria Roberta 20, Osain Rareş 24, Dragomir Markus 30, Carpen Alexandru 32, Jumărea Andra 18, Stroe Teodor 10, Ioniţă Sara Ioana 20, Iancu Patricia Maria 20, Dima Alexandra 30, Piscan Călin 20.

Şcoala Gimnazială Nr. 2 Boldeşti-Scăeni, Prof. Bilciurescu Ion: Marcu Ionuţ 12, Roşu Vlăduţ 8, Bălănescu Gabriela 15, Dobrescu Valentina 15. **Prof. înv. pr. Bilciurescu**

Florina: Alexandru Andreea 27, Bîrjovanu Radu 37, Costache Călin 29, Ciobanu Denisa 42, Căpitănescu Denis 38, Cojocaru Doriana 28, Dincă Radu 45, Doman Iustin 55, Dragomir Ştefan 38, Feraru Daria 35, Mateşan Pavel 31, Mihai Casian 35, Soare Alin 23, Stoica Andu 35, Tarcău Călin 28, Tatu Andreea 30, Vişănoiu Maria 56, Vasile Alex 34 , Crişan Mario 44. **Prof. înv. pr. Dinu Daniela-Elena:** Georgescu Alexia 22, Fan Maia 36, Manole Alexandra 34, Ilie Antonia 24, Ştefan Alexandra 12. **Înv. Voicu Roxana:** Ghindescu Rareş 40 , Cocan Alesia 30 , Cernat Mălina 30 , Biţă Cristian 30 , Nicolae David 31 , Manolache Alexandra 29 , Corbeanu Daria 22 , Marcu Ioana 10 . **Prof. înv.pr. Posescu Tatiana:** Petricioiu Teodor 34, Teodorescu Florin 34 , Colţeanu Andrei 34 , Voicu Gabriel 34 , Fieraru Ana-Maria 34 , Teodorescu Isabel 34

Şcoala Gimnazială „Constantin Stere” Bucov, Grațiela Calcan: Andrei Veronica 6, Bîcîin Alexandra 5, Mihai Andreea 5, Minea Nicoleta 5, Ilina Alexandru 3, Iuga Ramona 2, Malaisteanu Ana-Maria 3, Panait Natalia 2, Trandafirescu Ioana 1, Toader Delia 2, Ionescu Iulia 2, Tanase Alexandru 3, Dicu Raluca 2.

Şcoala Gimnazială Româneşti, prof. Cristea Sergiu: Angheloiu Alexandra 10, Ion Rebeca 10, Iacob Denisa 10

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân” Constanţa Contanu Prof. Contanu Mihai: Ciopa Nicole 9, Stresina Brindusa 9, Dragus Alexandra 9, Dimitri Ianis 9, Abit Emre 9, Matei Irina 9, Maxim Iulia 9, Epure Elena 9, Lefter Sanziana 9, Cristea Mihnea 9, Pantazi Alexandra 9, Badescu Mario 9, Moise Tiberiu 9, Cristea Ovidiu 9, Pasare Diana 9, Bratulescu Bianca 9, Ion Diana 9, Gache Adina 9, Tetu Daria 9, Osman Arun 9, Burlibasa Cristiana 9, Liuta Costin 9, Anagnosti Teodor 9, Andries Miruna 9, Calila Ipek 9, Tudor Andrei 9, Gula George 9, Sirbu Alexandru 9, Carbunaru Rares 9, Dinu Lorena 9, Vriscu Ianis 9, Cristea Ruxandra 9, Prelipcean Diana 9, Popescu Maria 9, Selaru Andrei 9, Telehoi Vlad 9, Bonciu David 9, Ardeleanu Dan 9, Bratu Rares 9, Coada Alexandra 9, Papadopol Cristina 9, Simionov Bogdan 9, Ciortan Alexandra 9, Bisinicu Mara 9, Darlaiani Marielena 9, Murineanu Andrei 9, Dumbrava Dragos 9, Enache Andrei 9, Ciju Cosmin 9, Dospinescu Stefania 9, Burnichi Alexandra 9, Paris Raluca 9, Mustata Amalia 9, Cusa Carmen 9, Anton Daria 9, Nastasie Diana 9, Panait Ilinca 9, Mateiciuc Mihai 9, Florea Luana 9, Costache Carina 9, Tudorache Catalina 9, Veli Amir 9, Gheorghe Arina 9, Nicu Sabina 9, Dulgheru Andrei 9, Minu Maria 9, Mustata Selin 9, Trana Elena 9, Manea Stefan 9, Fustanela Maria 9, Giuglea Alisa 9, Alexandrescu Daria 9, Scriosteanu Cosmin 9, Ciju Leena 9, Mosneagu Teodora 9, Sabau Tiberiu 9, Ionescu Serban 9, Gheldi Iren 20.

Şcoala Daneţi, Jud. Dolj, Ozunu Ştefana 17.

Şcoala Nr. 1 Suceava, Şcoala Nr. 1 Suceava, Înv. Prof. Toma Lăcrămioara: Buta Ana Letiția 34; Domunco Daria Teodora 20; Fujii Luca Ion 34; Gheţău Ioana 34; Haghiac Maria 20; Ignătescu Răzvan 20; Irimescu-Kruk Timea 34; Ivan Rareș Răzvan 20; Melinte Popescu Tudor Ștefan 34; Mihailov Andreea Valentina 34; Pîslaru Andrada 20; Popovici Mihnea 35; Puha Sara 20; Rîșca Victor Bogdan 34; Sorocaniuc Ciprian Luca 34; Stroia Viana 20; Tomniuc Matei 20; Velnicer Delia 30; Vizitiu Tudor Ștefan 34. **Prof. Domunco Ștefania**: Coteț Valentin; Bichir Maria Medeea. **Prof. înv. pr. Ienache Maria:** Apostol Dragos 37, Timis Denis 37