**INSPECTORATUL ȘCOLAR**
**JUDEȚEAN ILFOV**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

# TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I

**Clasa a XII-a** ***Matematică-informatică***

***11.12.2015***

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.**
**• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
**• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{2}x+\hat{3}=\hat{1}$.

**5p** **2.**Pe mulţimea $M=\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $*: M\times M\to M$, $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}, \forall x,y\in M$ .Determinați elementul neutru al legii.

**5p** **3.** Se consideră mulţimea $G=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}, a^2-2b^2=1\right\}$. Să se arate că $3+2\sqrt{2}\in G$.

**5p** **4.**Calculaţi $\int xe^{x^2}dx$.

**5p** **5.**Calculaţi $\int_0^1 \frac{1}{8-2x^2}dx$.

**5p** **6.** Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care o primitivă a sa este de forma: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+\operatorname{arctg}(3x)$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră legea de compoziţie $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x*y=xy-5x-5y+30$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

**5p** **a)** Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

**5p** **b)** Arătați că legea este asociativă.

**5p** **c)** Calculaţi $(-2015)*(-2014)*\ldots*(2014)*(2015)$

**2.** Se consideră mulțimea $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}\middle| a\in(0,\infty)\right\}$

**5p** **a)** Arătați că: $I_3\in G$ şi $O_3\notin G$.

**5p** **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, $\forall A(a),A(b)\in G$.

**5p** **c)** Determinați $(A(a))^{-1}$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}+2 & ,x\geq 1\\ x^2-2x+3 & ,x<1\end{cases}$.

**5p** **a)** Arătați că funcţia $f$ admite primitive.

**5p** **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei $f$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,1)$.

**5p** **c)** Determinaţi primitiva funcţiei $f$ al cărei grafic trece prin punctul $A(0,3)$.

**2.** Pentru fiecare număr natural $n$ se consideră $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\cdot\sin x$ și $I_n=\int f_n(x)dx$

**5p** **a)** Calculați $I_1$.

**5p** **b)** Să se calculeze $\int\frac{(\ln^2 x)\cdot(\sin x)}{f_1(x)}dx$.

**5p** **c)** Să se arate că $I_n=-x^{n-1}(x\cos x-n\cdot\sin x)-n\cdot(n-1)I_{n-2}$, $\forall n\geq 2$.

**INSPECTORATUL ȘCOLAR**
**JUDEȚEAN ILFOV**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

**TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I**
**Clasa a XII-a *Matmatică-Informatică***
***11.12.2015***
**BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE**

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.**
**• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
**• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
**• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

**SUBIECTUL I**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\hat{2}x=\hat{4}$<br>$\begin{array}{c\|cccccc} x & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} \\ \hline \hat{2}x & \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} \end{array}$<br>$x\in\left\{\hat{2},\hat{5}\right\}$ | **1p**<br>**2p**<br>**2p** |
| **2.** | $\exists e\in\mathbb{R}$ a.î. $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$<br>$x*e=\sqrt{x^3+e^3}=\sqrt{e^3+x^3}=e*x$ , $\forall x\in\mathbb{R}$<br>$x*e=x\Leftrightarrow\sqrt{x^3+e^3}=x$ , $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^3+e^3=x^3,\forall x\in\mathbb{R}$<br>$e=0\in\mathbb{R}$ | **1p**<br>**1p**<br>**2p**<br>**1p** |
| **3.** | $a+b\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}\Rightarrow a=3\in\mathbb{Z}$ ,$b=2\in\mathbb{Z}(1)$<br>$a^2-2b^2=9-2\cdot2^2=9-8=1(2)$<br>Din (1) și (2)$\Rightarrow 3+2\sqrt{2}\in G$ | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| **4.** | $x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt$<br>$I_t=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C$<br>$I_x=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$ | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| **5.** | $\int_0^1\frac{1}{8-2x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx=$<br>$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\|\Big\|_0^1=$<br>$=-\frac{1}{8}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln 1\right)=-\frac{1}{8}\ln\frac{1}{3}=\frac{\ln 3}{8}$ | **1p**<br>**2p**<br>**2p** |
| **6.** | $F$ primitiva lui $f\Leftrightarrow F$ derivabilă și $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$<br>$\Rightarrow f(x)=\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)'+\left[arctg(3x)\right]'=\frac{1}{\cancel{\ln 2}}\cdot 2^x\cancel{\ln 2}+\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3=$<br>$=2^x+\frac{3}{9x^2+1}$ | **1p**<br>**3p**<br>**1p** |

**SUBIECTUL al II-lea**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | **a)** | $(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=$<br>$=xy-5x-5y+30=x*y,\forall x,y\in\mathbb{R}$ | **3p**<br>**2p** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **b)** | $(x*y)*z=(x-5)(y-5)(z-5)+5,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$<br>$x*(y*z)=(x-5)(y-5)(z-5)+5,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$<br>$\Rightarrow(x*y)*z=x*(y*z)\forall x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$ "$*$" asociativa | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| | **c)** | $(-2015)*(-2014)*\ldots*(2014)*(2015)$<br>$\overset{asoc}{=}\underbrace{\left[(-2015)*(-2014)*\ldots*4\right]}_{x}*5*\underbrace{\left[6*\ldots*2015\right]}_{y}=$<br>$=x*5*y\overset{asoc}{=}(x*5)*y=\left[(x-5)(5-5)+5\right]*y=5*y=(5-5)(y-5)+5=5$ | **2p**<br>**3p** |
| **2.** | **a)** | Pt. $a=1\in(0,\infty)\Rightarrow A(1)=I_3\Rightarrow I_3\in G$<br>Pp. $O_3\in G\Rightarrow\exists a\in(0,\infty)$ a.î $A(a)=O_3\Rightarrow\begin{cases}0=1\\a=1\\a=0\end{cases}$ imposibil, deci $O_3\notin G$ | **2p**<br>**3p** |
| | **b)** | $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1&0&\ln a\\0&a&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\ln b\\0&b&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$<br>$=\begin{pmatrix}1&0&\ln a+\ln b\\0&ab&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\ln(ab)\\0&ab&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(ab)$<br>$a>0,b>0\Rightarrow ab>0$ | **2p**<br>**3p** |
| | **c)** | $(A(a))^{-1}\overset{not}{=}A(b)\Rightarrow A(a)A(b)=A(b)A(a)=A(1)=I_3$<br>Cf. b) $A(a)A(b)=A(ab)=A(ba)=A(b)A(a)$<br>$(1)\ A(a)=A(b)\Rightarrow a=b$<br>$\Rightarrow A(ab)=A(1)\overset{(1)}{\Rightarrow}ab=1\Rightarrow b=\dfrac{1}{a},a>0\Rightarrow b>0$<br>$\Rightarrow(A(a))^{-1}=A\left(\dfrac{1}{a}\right)\in G$ | **1p**<br>**1p**<br>**2p**<br>**1p** |

**SUBIECTUL al III-lea**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | **a)** | $f$ continuă pe $(-\infty,1)$ şi pe $(1,\infty)$ -operaţii cu funcţii continue.(1)<br>$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x^2-2x+3)=1-2+3=2$<br>$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\dfrac{\ln x}{x}+2\right)=\dfrac{0}{1}+2=2$<br>$f(1)=2\Rightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)\Rightarrow f$ continuă în $x=1$ (2)<br>Din (1) şi (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive. | **1p**<br>**1p**<br>**1p**<br>**1p**<br>**1p** |
| | **b)** | Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f\Rightarrow F$ derivabilă şi $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$<br>Pt $x\in(-\infty,1),F'(x)=f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0,\forall x\in(-\infty,1)$<br>$\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $(-\infty,1)$. | **1p**<br>**3p**<br>**1p** |
| | **c)** | $\int\left(\dfrac{\ln x}{x}+2\right)dx=\dfrac{\ln^2x}{2}+2x+c_1$<br>$\int(x^2-2x+3)dx=\dfrac{x^3}{3}-x^2+3x+c_2$ | **2p**<br>**1p** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Fie F o primitivă a lui f. $F(x)=\begin{cases}\frac{\ln^2 x}{2}+2x+c_1 & ,x\geq 1\\ \frac{x^3}{3}-x^2+3x+c_2 & ,x<1\end{cases}$<br><br>F derivabilă, deci continuă . F continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, op cu fc elementare, F continuă în $x=1 \Leftrightarrow l_s(1)=l_d(1)=F(1) \Rightarrow \frac{7}{3}+c_2=2+c_1 \Rightarrow c_1=\frac{1}{3}+c_2$<br>$F(0)=3 \Rightarrow c_2=3 \Rightarrow F(x)=\begin{cases}\frac{\ln^2 x}{2}+2x+\frac{10}{3} & ,x\geq 1\\ \frac{x^3}{3}-x^2+3x+3 & ,x<1\end{cases}$ primitiva al cărei grafic trece prin $A(0,3)$. | 1p<br>1p |
| **2.** | **a)** | $I_1=\int f_1(x)dx=\int(x\cdot\sin x)dx$<br>$=\int x\cdot(-\cos x)'dx=-x\cdot\cos x+\int\cos x dx=$<br>$=-x\cdot\cos x+\sin x+C$ | 1p<br>3p<br>1p |
| | **b)** | $\int\frac{\ln^2 x\cdot\cancel{\sin x}}{x\cdot\cancel{\sin x}}dx=\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=I_x$<br>$\ln x=t\Rightarrow\frac{1}{x}dx=dt\Rightarrow I_t=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C$<br>$I_x=\frac{\ln^3 x}{3}+C$ | 1p<br>3p<br>1p |
| | **c)** | $I_n=\int(x^n\cdot\sin x)dx=\int x^n\cdot(-\cos x)'dx=$<br>$=-x^n\cdot\cos x+n\int(x^{n-1}\cdot\cos x)dx=-x^n\cdot\cos x+n\int x^{n-1}\cdot(\sin x)'dx=$<br>$=-x^n\cdot\cos x+n\left(x^{n-1}\cdot\sin x-(n-1)\underbrace{\int x^{n-2}\sin x dx}_{I_{n-2}}\right)\Rightarrow$<br>$I_n=-x^{n-1}(x\cdot\cos x-n\cdot\sin x)-n\cdot(n-1)I_{n-2},\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2.$ | 1p<br>2p<br>1p<br>1p |