TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XII-a Ș*tiințe ale naturii*

11.12.2015

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Științe ale naturii

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Rezolvați în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{3}$.

5p **2.** Arătați că $e=-6$ este elementul neutru al legii de compoziție $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x*y=xy+7x+7y+42$.

5p **3.** Studiați asociativitatea legii $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x*y=x+y+1, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **4.**Calculați: $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

5p **5.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(2-x)^{2015} & ,x<2\\ \ln(x-1) & ,x\geq 2\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **6.** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^{-x}-2$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-e^{-x}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulţimea $G=(3,\infty)$,fie legea de compoziţie $*:G\times G\to G, x*y=xy-3x-3y+12, \forall x,y\in G$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-3)(y-3)+3, \forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se rezolve în G ecuația: $x*x=x*6$.

5p **c)** Determinați $5'\in G$,simetricul lui 5 în raport cu legea $*$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 3b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in Z, a^2-3b^2=1\right\}\subset M_2(\mathbb{Z})$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin G$.

5p **b)** Să se arate că pentru $\forall A,B\in G\Rightarrow A\cdot B\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparţine mulţimii G.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $g(x)=\frac{1}{x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int x\cdot f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\int g(x)\cdot\ln x\,dx$.

2. Se consideră funcţiile $f_m:[0;1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine primitivele funcţiei f_1.

5p **b)** Să se calculeze $\int e^x f_0(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int 2f_0(x)e^{x^2+2x+3}dx$.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Ştiinţe ale Naturii*
11.12.2015
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale Naturii
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I

1.	$\hat{2}x=\hat{2}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hline \hat{2}x & \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} & \hat{1} & \hat{3} \end{array}$ $x=\hat{1}$	**1p** **3p** **1p**
2.	$(-6)\in\mathbb{R}$ element neutru $\Leftrightarrow x*(-6)=(-6)*x=x, \forall x\in\mathbb{R}$ $x*(-6)=-6x+7x-42+42=x, \forall x\in\mathbb{R}$ $(-6)*x=-6x-42+7x+42=x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow x*(-6)=(-6)*x=x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow (-6)\in\mathbb{R}$ este e.n	**1p** **2p** **2p**
3.	$(x*y)*z=(x+y+1)+z+1=x+y+z+2, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $x*(y*z)=x+(y+z+1)+1=x+y+z+2, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z) \forall x,y,z\in\mathbb{R} \Rightarrow$ "$*$" asociativa	**2p** **2p** **1p**
4.	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dt=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\|_0^{\sqrt{3}}=$ $=\ln\left(\sqrt{3}+2\right)-\ln 1=\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$	**3p** **2p**
5.	f continuă pe $(-\infty,2)$ şi pe $(2,\infty)$ -operaţii cu funcţii continue.(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(2-x)^{2015}=0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(\ln(x-1))=\ln 1=0$ $f(2)=0\Rightarrow l_s(2)=l_d(2)=f(2)\Rightarrow f$ *continuă* *î*n x=2 (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive.	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
6.	$F'(x)=\left(e^{-x}-2\right)'=-e^{-x}-0=-e^{-x}=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ deci F este o primitivă a funcţiei f	**4p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(x-3)\cdot(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3=$ $=xy-3x-3y+12=x*y, \forall x,y\in G$	**3p** **2p**
	b)	$x*x=(x-3)^2+3$ $x*6=3(x-3)+3$ $(x-3)^2+3=3(x-3)+3\Leftrightarrow(x-3)^2=3(x-3)\Rightarrow x_1=3\notin G, x_2=6\in G\Rightarrow x=6$ soluţie	**2p** **1p** **2p**

	c)	$\exists e \in G$ a.i. $x * e = e * x = x, \forall x \in G \Leftrightarrow (x-3)\cdot(e-3)+3=(e-3)\cdot(x-3)+3=x, \forall x \in G$ $e = 4 \in G$ $5 * 5' = 5' * 5 = 4 \Rightarrow (5-3)\cdot(5'-3)+3=(5'-3)\cdot(5-3)+3=4$ $5' = \frac{7}{2} > 3 \Rightarrow 5' = \frac{7}{2}$	2p 1p 1p 1p
	a)	$O_2 \in G \Leftrightarrow \lvert \exists a,b \in Z, a^2-3b^2=1 ai = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0\in\mathbb{Z} \\ b=0\in\mathbb{Z} \end{cases}, a^2-3b^2=0\neq 1$ $\Rightarrow O_2 \notin G$ $I_2 \in G \Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{Z}\, a.i. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\in\mathbb{Z} \\ b=0\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a^2-3b^2=1 \Rightarrow I_2 \in G$	2p 3p
	b)	$A = \begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix}, c,d \in \mathbb{Z}$, $\det A = 1$, $B = \begin{pmatrix} m & n \\ 3n & m \end{pmatrix}$, $m,n \in \mathbb{Z}$, $\det B = 1$ $AB = \begin{pmatrix} cm+3dn & cn+dm \\ 3(cn+dm) & mc+3dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, a = cm+3dn,\ b = cn+dm\ (1)$ $c,d,m,n,3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = cm+3dn \in \mathbb{Z}$, $b = cn+dm \in \mathbb{Z}\ (2)$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1\cdot 1 = 1(3)$; Din (1),(2),(3)=> $AB \in G$	1p 2p 1p 1p
	c)	$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{Z}$, $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & (-b) \\ 3(-b) & a \end{pmatrix}(1)$ $a,(-b) \in \mathbb{Z}(2),\ \det(A^{-1}) = 1(3) \overset{1,2,3}{\Rightarrow} A^{-1} \in G$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

1.	a)	$\int xf(x)dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx = I_x$ $x^2+1=t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow I_t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln\lvert t\rvert + C$ $I_x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$	1p 3p 1p
	b)	Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f \Rightarrow F$ derivabilă şi $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pt.ca $1>0$, $x^2+1>0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F$ crescătoare pe $\mathbb{R}$.	2p 2p 1p
	c)	$\int g(x)\cdot \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x}dx = I_x$ $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \Rightarrow I_t = \int tdt = \frac{t^2}{2}+C$ $\Rightarrow I_x = \frac{\ln^2 x}{2}+C$	1p 3p 1p
2.	a)	$f_1(x) = x^2+x+1$ $\int f_1(x)dx = \int (x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$	1p 4p
	b)	$f_0(x) = x+1$ $\int f_0(x)e^x dx = \int (x+1)e^x dx = \int (x+1)\cdot(e^x)' dx =$	1p 1p

		$=(x+1)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$	**3p**
	c)	$\int 2f_0(x)e^{x^2+2x+3}dx=\int 2(x+1)e^{x^2+2x+3}dx=I_x$ $x^2+2x+3=t\Rightarrow 2(x+1)dx=dt\Rightarrow I_t=\int e^t dt=e^t+C$ $I_x=e^{x^2+2x+3}+C$	**1p** **3p** **1p**