INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XII-a *Tehnologic*

11.12.2015

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic toate calificările profesionale

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați opusul elementului $\hat{3}$ în grupul $\left(\mathbb{Z}_7,+\right)$.

5p **2.** Arătaţi că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x*y=x+y-1$.

5p **3** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+y+xy$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se calculeze $1\circ 2$.

5p **4.**Calculaţi: $\int\frac{1}{x^2+9}dx$.

5p **5.** Să se calculeze $\int\frac{3x^5+4x-2}{x}dx$, $x>0$.

5p **6.** Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=x\cdot e^x+2$ este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x+1)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulţimea $G=(-3,\infty)$,fie legea de compoziţie $*:G\times G\to G, x*y=xy+3x+3y+6, \forall x,y\in G$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=(x+3)(y+3)-3, \forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se rezolve în G ecuaţia: $x*x=x$.

5p **c)** Determinaţi simetricul lui 5 în raport cu legea $*$.

2.Se consideră mulţimea $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$

5p **a)** Să se verifice $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M$

5p **b)** Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(10)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+8}, & x>1\\ 3x, & x\le 1\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Pentru $x>1$, să se determine : $\int f^2(x)dx$..

5p **c)** Calculaţi $\int_0^1 e^x\cdot f(x)dx$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,\infty)\to(0,\infty), f(x)=\frac{2x^2+1}{x}, F(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că F este o primitivă a lui f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 x\cdot f(x)dx$.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia F este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehonologic*
11.12.2015
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic toate calificările profesionale
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I

1.	$-\hat{3}=\widehat{7-3}=$ $=\hat{4}$	**3p** **2p**
2.	$e=1 e.n \Leftrightarrow x*1=1*x=x, \forall x\in\mathbb{R}$ $x*1=x+1-1=x, \forall x\in\mathbb{R}$ $1*x=1+x-1=x, \forall x\in\mathbb{R}$	**1p** **2p** **2p**
3.	$1\circ 2=1+2+1\cdot 2=$ $=5$	**3p** **2p**
4.	$F(x)=\int\frac{1}{x^2+9}dx=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$	**5p**
5.	$\int\frac{3x^5+4x-2}{x}dx=3\int\frac{x^5}{x}dx+4\int\frac{x}{x}dx-2\int\frac{1}{x}dx=$ $=3\frac{x^5}{5}+4x-2\ln\lvert x\rvert+C=3\frac{x^5}{5}+4x-2\ln x+C$	**2p** **3p**
6.	F primitiva lui $f \Leftrightarrow F$ derivabila si $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ $F'(x)=\left(xe^x+2\right)'=e^x+xe^x+0=e^x(x+1)=$ $=f(x), \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este o primitivă pentru f.	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea

1.	**a)**	$(x+3)\cdot(y+3)-3=xy+3x+3y+9-3=$ $=xy+3x+3y+6=x*y, \forall x,y\in G$	**3p** **2p**
	b)	$x*x=(x+3)^2-3$ $(x+3)^2-3=x\Leftrightarrow(x+3)^2=x+3\Rightarrow x_1=-3\notin G, x_2=-2\in G\Rightarrow x=-2$ soluția ecuației	**2p** **3p**
	c)	$\exists e\in G$ a.i. $x*e=e*x=x, \forall x\in G\Leftrightarrow(x+3)\cdot(e+3)-3=(e+3)\cdot(x+3)-3=x, \forall x\in G$ $\Rightarrow e=-2\in G$ $5*5'=5'*5=-2\Rightarrow(5+3)\cdot(5'+3)-3=(5'+3)\cdot(5+3)-3=-2$ $5'=\frac{-23}{8}>-3\Rightarrow 5'=\frac{-23}{8}$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.	**a)**	$I_2=A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2^x=1\\ 0=0 \text{ si } 1=1\end{cases}\Rightarrow x=0$	**3p**

		Pentru $x=0\in\mathbb{R}\Rightarrow A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2\in G$	**2p**
	b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}2^x&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^y&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{x+y}&0\\0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**5p**
	c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(10)\overset{b)}{=}A(1+2+\cdots+10)=$ $=A\left(\frac{(1+10)\cdot 10}{2}\right)=A(55)=\begin{pmatrix}2^{55}&0\\0&1\end{pmatrix}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea

1.	**a)**	f continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,\infty)$ - operații cu funcții continue.(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\sqrt{x^2+8}\right)=3$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}3x=3$ $f(1)=3\Rightarrow l_s(1)=l_d(1)=f(1)=3\Rightarrow f$ continuă în $x=1$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive.	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p**
	b)	$\int f^2(x)dx=\int\left(x^2+8\right)dx=$ $\frac{x^3}{3}+8x+C$	**2p** **3p**
	c)	$\int_0^1 e^x\cdot f(x)\,dx=3\int_0^1 x\cdot e^x dx$ $3\left(xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)=3\left(xe^x\Big\vert_0^1-e^x\Big\vert_0^1\right)=$ $=3(e-0-e+1)=3$	**1p** **2p** **2p**
2.	**a)**	$F'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}=$ $=f(x),\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă pentru f.	**4p** **1p**
	b)	$\int_1^2 xf(x)dx=\int_1^2\left(2x^2+1\right)dx=$ $=2\frac{x^3}{3}\Big\vert_1^2+x\Big\vert_1^2=$ $=\frac{2}{3}(8-1)+2-1=\frac{17}{3}$	**1p** **2p** **2p**
	c)	Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui $f\Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x)=f(x),\forall x\in(0,\infty)$ $F'(x)=f(x)=\frac{2x^2+1}{x}>0,\forall x\in(0,\infty)$ $\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $(0,\infty)$.	**1p** **3p** **1p**