XII. MULŢIMI

Prin mulţime înţelegem o colecţie de obiecte bine determinate şi distincte. Obiectele din care este constituită mulţimea se numesc elementele mulţimii.
Moduri de a defini o mulţime:
- sintetic, prin enumerarea elementelor mulţimii, A = {0, 2, 4, 6, 8};
- analitic, cu ajutorul unei proprietăţi ce caracterizează elementele mulţimii: A = {x | x număr par, $x \leq 8$}
Fie mulţimea A. Definim cardinalul mulţimii A, ca fiind numărul elementelor acestei mulţimi şi notăm cu card(A) sau |A|.
Două mulţimi sunt egale dacă ele sunt formate din exact aceleaşi elemente.
$x \in A$ dacă x este element al lui A
$x \notin A$ dacă x nu este element al lui A

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ şi } x \in B \}$

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \}$

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B \}$

$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$;

$\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(A \cap B)$

$-\operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C)$

$\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B)$;

$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card}(A) \cdot \operatorname{card}(B)$.

Fie A şi B două mulţimi, spunem că A este submulţime a mulţimii B dacă toate elementele lui A sunt şi elemente ale lui B. Notăm $A \subseteq B$.
Dacă o mulţime se scrie ca o reuniune de submulţimi ale ei disjuncte două câte două, spunem că am realizat o partiţie a acelei mulţimi.
Fie $A \subseteq M$. Definim complementara mulţimii A în raport cu mulţimea M, ca fiind mulţimea notată $C_M A$ *şi definită astfel:* $C_M A = \{ x \mid x \in M \text{ şi } x \notin A \}$.

$A \cup C_M A = M$;

$A \cap C_M A = \varnothing$;

$C_M \cap (C_M A) = A$;

$C_M (A \cup B) = C_M A \cap C_M B$;

$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B$;

$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B$

Fie A şi B două mulţimi. Definim diferenţa simetrică a celor două mulţimi, ca fiind mulţimea formată din elementele necomune celor două mulţimi. Notăm $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

$A \Delta A = \varnothing$.

Fie A şi B două mulţimi. Definim produsul cartezian a celor două mulţimi, ca fiind mulţimea $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B \}$.

Operaţiile cu mulţimi au următoarele proprietăţi:

1) Reuniunea, intersecţia şi diferenţa simetrică sunt comutative:

$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \Delta B = B \Delta A$.

2) Diferenţa şi produsul cartezian nu sunt comutative:

$A \setminus B \neq B \setminus A$ *şi* $A \times B \neq B \times A$.

3) Reuniunea, intersecţia şi diferenţa simetrică sunt asociative:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

4) Intersecţia este distributivă faţă de reuniune:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

5) Reuniunea este distributivă faţă de intersecţie:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

6) Intersecţia este distributivă faţă de diferenţa simetrică:

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Probleme rezolvate:

1. Se dă mulţimea M={1;4;7;10;13;...;97;100} şi o submulţime S a lui M formată din 19 elemente. Să se arate că există în mulţimea S două elemente a căror sumă este egală cu 104. (Brăila, et. judeţeană)

Rezolvare:

M are 34 elemente. Fie 18 submulţimi disjuncte ale mulţimii M: {1}; {52}; {4;100}; {7;97} ;...; {46;58}; {49;55}. Dacă în S nu este inclusă nicio submulţime cu două elemente, atunci S conţine câte un element al celor 18 mulţimi considerate. Al 19-lea element va fi dintr-o mulţime cu două elemente.

2. Care dintre mulţimile următoare are mai multe elemente: $A = \{ x \in \mathbf{N} \mid 2^{1994} < x \leq 2^{1997} \}$ şi $B = \{ x \in \mathbf{N}^* \mid x \leq 2^{1996} \}$. Justificaţi răspunsul. (Neamţ, et. judeţeană)

Rezolvare:

Observăm că $B = \{1, 2, ..., 2^{1996}\}$, deci $\text{Card}B = 2^{1996}$. Pe de altă parte $A = \{ 2^{1994} + 1, 2^{1994} + 2, ..., 2^{1997} \}$, deci $\text{Card}A = 2^{1997} - (2^{1994} + 1) + 1 = 2^{1997} - 2^{1994} = 2^{1994} \cdot (2^3 - 1) = 7 \cdot 2^{1987} > 2^2 \cdot 2^{1994} = 2^{1996} \Rightarrow \text{Card}A > \text{Card}B$.

3. Se dau mulţimile:

$A = \{x \in N \mid 7^x = 1 \text{ sau } 7^x = 2401\}, B = \{y \in N \mid y = U(x^2), x \in N\}, C = \{z \in N \mid 2011^{z^2 - z} \text{este pătrat perfect}\}$

(s-a notat cu U(a) ultima cifră a lui a) .

Stabiliţi care afirmaţie este adevărată: a) $A \cup B \subset C$, b) $(A \cap B) \cup N^* = C$ (Gazeta matematică, seria B)

Rezolvare:

Din condiţiile date rezultă imediat că $A = \{0, 4\}$, ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi: 0,1,4,5,6,9 $\Rightarrow B = \{0,1,4,5,6,9\}$. $z^2 - z = z(z-1)$ produsul a două numere consecutive este un număr par $\Rightarrow$ $z(z-1)=2k$ $\Rightarrow$ $(2011^k)^2$ este pătrat perfect, $\forall\ k \in N \Rightarrow C = N \Rightarrow$ a) $A \cup B = \{0,1,4,5,6,9\} \subset C$ este o afirmaţie adevărată, b) $A \cap B = \{0, 4\} \cup N^* = N = C$ este o afirmaţie adevărată.

4. Câte elemente conţine mulţimea $M = \{x \mid x = a^2 + b^2, a, b \text{ cifre}\}$? (Sibiu, et. Judeţeană)

Rezolvare:

$a^2 + b^2 = b^2 + a^2$. Pătratele celor 10 cifre sunt elementele mulţimii: $P = \{ 0,1,4,9,16,25,36,49,64,81 \}$.

Pentru a găsi toate rezultatele posibile adunând două elemente ale mulţimii P, este suficient să adunăm un element cu toate cele mai mari sau egale cu el. Numărul total de adunări cu rezultate distincte este:

$10+9+8+...+2+1=55$. Constatăm că există perechi diferite (a,b) şi (c,d) astfel încât $a^2+b^2=c^2+d^2$, de exemplu: $1^2+7^2=5^2+5^2$. Deci, aceste 55 de adunări nu conduc toate la rezultate distincte. Avem: $0+25=9+16$, $1+49=25+25$, $1+64=16+49$, $4+81=36+49 \Rightarrow \text{Card}(M)=55-4=51$.

5. Se dau mulţimile: $A=\{x=2^{4n+3}+5^{n+1}-1 \mid n\in N\}$ şi $B=\{y=4^n \mid n\in N\}$. Calculaţi $A\cap B$ justificând răspunsul dat. (Bucureşti, et. locală)

Rezolvare:

$4^n=(2^2)^n=(2^n)^2$ pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural $\Rightarrow U(y)\in\{0,1,4,5,6,8\}$. $U(x)=U(2^{4n+3})+U(5^{n+1})-1$, $U(5^{n+1})=5$ oricare ar fi n număr natural, $U(2^{4n+3})=U(2^3)=8\Rightarrow$ $U(x)=2$, deci $A\cap B=\varnothing$.

6. Să se determine numerele naturale nenule a,b,c ştiind că mulţimile $A=\{2a+1,b+c\}$, $B=\{2b+1,a+c\}$ şi $C=\{2c-5,a+b\}$ sunt submulţimi ale mulţimii $M=\{1,3,4,5\}$. (Hunedoara, et. locală)

Rezolvare:

Din condiţia a,b,c numere naturale nenule $\Rightarrow$2a+1, 2b+1, a+b, a+c, b+c sunt numere mai mari decât 1, deci $2c-5=1\Rightarrow c=3$. Numerele 2a+1, 2b+1 sunt impare, deci 2a+1=3, 2b+1=5$\Rightarrow$a=1, b=2 sau 2a+1=5, 2b+1=3 $\Rightarrow$a=2, b=1$\Rightarrow$(a,b,c)$\in\{(1,2,3),(2,1,3)\}$.

7. Determinaţi mulţimile A şi B ştiind că satisfac simultan condiţiile:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$;
b) $A\cap B=\{3,4\}$;
c) $A\cap\{5,6,7\}=\varnothing$;
d) $\{1,2\}\cap B=\varnothing$. (Gazeta metematică, seria B)

Rezolvare:

Din condiţia b)$\Rightarrow 3\in A, 4\in A$ şi $3\in B, 4\in B$. Din condiţia c) $\Rightarrow 5,6,7\notin A$ şi cum $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}\Rightarrow$ $\{5,6,7\}\subset B$. Din condiţia d)$\Rightarrow 1,2\notin B$ dar $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}\Rightarrow\{1,2\}\subset A$. În concluzie $A=\{1,2,3,4\}$ şi $B=\{3,4,5,6,7\}$.

8. Fie mulţimea $X=\{2,4,6,8,10,...\}$ şi submulţimile $X_1=\{2\}$, $X_2=\{4,6\}$, $X_3=\{8,10,12\}$, $X_4=\{14,16,18,20\}$, ... Notăm cu S_n suma elementelor mulţimii X_n.

a) Scrieţi elementele mulţimii X_{21};

b) Determinaţi $a\in\mathbf{N}$ astfel încât $S_{21}-21=(a+21)^2-a^2$. (Maramureş, et. judeţeană)

Rezolvare:

Observăm că mulţimea X_n este formată din cele n numere pare care urmează după cele $1+2+3+...+(n-1)$ numere pare care se află în mulţimile anterioare mulţimii X_n. Cum $1+2+3+...+(n-1)=\dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$, deducem că cel mai mic element al mulţimii X_n este $(n-1)\cdot n+2$, iar $X_n=\{(n-1)\cdot n+2\cdot 1,(n-1)\cdot n+2\cdot 2,...,(n-1)\cdot n+2\cdot n\}$.

a) Prin urmare $X_{21}=\{20\cdot 21+2\cdot 1,20\cdot 21+2\cdot 2,...,20\cdot 21+2\cdot 21\}$, adică $X_{21}=\{422,424,...,462\}$.

b) $S_{21}=422+424+...+462=(420+2)+(420+4)+...+(420+42)=$
$=420\cdot 21+2\cdot(1+2+...+21)=442\cdot 21=17682$. Obţinem ecuaţia: $442\cdot 21-21=(a+21)^2-a^2$.

$(a+21)^2=(a+21)\cdot(a+21)=a\cdot(a+21)+21\cdot(a+21)=a^2+42a+21^2$. Ecuaţia devine: $442\cdot 21-21$ $=a^2+42a+21^2-a^2 \Leftrightarrow 442\cdot 21-21=42a+21^2$. Simplificăm prin 21: $442-1=2a+21 \Rightarrow a=210$.

9. Să se găsească mulţimile A şi B care au fiecare câte 3 elemente, numere naturale, ştiind că satisfac următoarele proprietăţi:
a) $4\in A\bigcap B$;
b) $x\in A \Rightarrow x^2\in B$;
c) suma elementelor mulţimii B este triplul sumei elementelor mulţimii A. (Caraş Severin, et. judeţeană)

Rezolvare:

Din condiţia a) $\Rightarrow 4\in A\bigcap B \Rightarrow 4\in A \overset{b)}{\Rightarrow} 16\in B$. Fie x şi y celelalte două elemente din A, deci $A=\{4,x,y\}$ $\Rightarrow x^2\in B$, $y^2\in B \Rightarrow x^2=4$ sau $y^2=4$. Fie $x^2=4\Rightarrow x=2\Rightarrow A=\{4,2,y\}\Rightarrow B=\{4,16,y^2\}$. Din condiţia c) rezultă ecuaţia: $4+16+y^2=3\cdot(2+4+y) \Leftrightarrow y^2+2=3y \Rightarrow 2=y\cdot(3-y)$ $y\,|\,2 \Rightarrow$y=1, y=2, de unde $A=\{1,2,4\}$ şi $B=\{1,4,16\}$.

10. Fie mulţimea A=$\{2k+1\,|\,k\in\{0,1,2,3,...,168\}\}$.
a) Calculaţi suma elementelor mulţimii A;
b) Există 13 submulţimi ale mulţimii A disjuncte două câte două astfel încât fiecare submulţime să conţină13 elemente şi suma unor elemente din submulţime să fie egală cu suma celorlalte elemente din submulţime ? (Călăraşi, et. judeţeană)

Rezolvare:

a) $S=(2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+...(2\cdot 168+1)=2(0+1+2+3+....+168)+169=2\cdot 168\cdot(168+1):2+169=169^2$
b) Dacă există o astfel de partiţie a mulţimii A, suma numerelor din fiecare submulţime este un număr par, de unde rezultă că suma elementelor mulţimii A este un număr par. Contradicţie!

Probleme propuse

1. Să se demonstreze că mulţimile A=$\{n^2\,|\,n\in N\}$ şi B=$\{5n+2\,|\,n\in N\}$ sunt disjuncte. (Vâlcea, et. locală)
2. Se consideră mulţimile: A=$\{n\in N\,|\,5n+11 \text{ este divizibil cu } 17\}$, B=$\{n\in N\,|\,7n+5 \text{ este divizibil cu } 17\}$.
a) Să se arate că $8\in A$ şi este cel mai mic element al mulţimii A.
b) Să se stabilească valoarea de adevăr pentru fiecare din propoziţiile următoare:
P_1 „ Orice număr natural care dă restul 8 la împărţirea cu 17 este element al mulţimii A.”;
P_2 „ Există cel puţin un număr natural n cu proprietatea $n\in A\bigcap B$.”
3. Aflaţi elementele x,y şi determinaţi mulţimile A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:
a) $A\bigcup B=\{2,3,4,5,6\}$; b) $A\bigcap B=\{2,3,x\}$; c) $B\setminus A=\{y,5\}$. Aflaţi cardinalul mulţimii $A\setminus B$. (Bistriţa-Năsăud, et. judeţeană)
4. Fie A=$\{x\in N^*\,|\,3^{x+1}<2008\}$. Să se arate că nu există două mulţimi disjuncte B şi C, astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiţii:
a) $B\bigcup C=A$.
b) Mulţimea B să nu conţină elemente ce se pot exprima ca diferenţă de două numere din B.
c) Mulţimea C să nu conţină elemente ce se pot exprima ca diferenţă de două numere din C. (Botoşani, et. judeţeană)
5. Fie mulţimile A= $\{x\in N\,|\,2^{881}<x\le 2^{883}-2^{882}\}$ şi B= $\{y\in N\,|\,3\cdot 5^{440}\le y<5^{442}-2^2\cdot 5^{441}\}$. Dacă a este numărul elementelor mulţimii A şi b este numărul elementelor mulţimii B, atunci:

a) Comparaţi numerele a şi b.
b) Dacă a+b=2(c+d), arătaţi că c+d este un număr impar. (Covasna, et. judeţeană)
6. Se consideră mulţimea A=$\{3x+7y \mid x, y \in N\}$.
a) Stabiliţi dacă $2011 \in A$.
b) Detreminaţi cardinalul mulţimii $A \cap \{k^2 \mid k \in N, 1 \le k \le 100\}$. (Bucureşti, et. judeţeană)
7. Se consideră mulţimea A=$\{7, 36, 65, 94, ..., 2008\}$.
a) Aflaţi numărul elementelor mulţimii A.
b) Aflaţi suma elementelor mulţimii A. (Cluj, et. judeţeană)
8. Fie mulţimile A=$\{x \mid x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n + 13\}$ şi B=$\{y \mid y = b^2 + 1, b \in N\}$. Determinaţi $A \cap B$. (Iaşi, et. judeţeană)
9. Fie n număr natural mai mare decât 1 şi $A_n = \{1, 2, 3, ..., n-1\}$.
a) Scrieţi mulţimea A_9 ca reuniunea a două submulţimi disjuncte astfel încât suma elementelor celor două mulţimi să fie aceeaşi.
b) Scrieţi mulţimea A_{2006} ca reuniunea a două submulţini disjuncte astfel încât diferenţa dintre sumele celor două submulţimi să fie 2005. (Concursul Arhimede)
10. Fie mulţimea A=$\{4x+5y \mid x, y \in N\}$.
a) Să se arate că $2008 \in A$.
b) Să se arate că 16n+10m+47$\in$A, oricare ar fi m,n $\in$N.(Mehedinţi, et. judeţeană)
11. Fie mulţimile A=$\{m, p, k\}$, unde m,p,k sunt numere prime distincte care satisfac relaţia 3m+2p+8k=60 şi B=$\{x \mid x \text{ cifră a lui } \overline{abcd},\ \overline{abcd} \vdots 450, \text{a şi b consecutive}\}$. Determinaţi $A \cap B$. (Sălaj, et. judeţeană)

Soluţii probleme propuse

$x \in A \Rightarrow U(x) \in \{0,1,4,5,6,9\}$, $y \in B \Rightarrow U(y) \in \{2,7\} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$; 2. a) 5·8+11=51 divizibil cu 17, numerele 17 şi 34 sunt divizibile cu 17, dar nu sunt de forma 5n+11, b) fie n=17k+8$\Rightarrow$5n+11=85k+81=$M_{17}$$\Rightarrow$n$\in$A, deci P_1 adevărată, P_2 nu este adevărată, se demonstrează folosind metoda reducerii la absurd; 3. a) x=4 şi y=6 sau x=6 şi y=4, b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ şi $A \setminus B, A \cap B, B \setminus A$ sunt mulţimi disjuncte două câte două$\Rightarrow$card$(A \cup B)$=card $(A \setminus B)$+card$(A \cap B)$+card$(B \setminus A)$ $\Rightarrow$ card$(A \setminus B)$=0; 4. $A = \{1,2,3,4,5\}$. Deoarece 2−1=1, rezultă că elementele 1 şi 2 nu pot face parte din aceeaşi submulţime, deci $1 \in B$ şi $2 \in C$. Cum 5−4=1 şi 5−3=2, rezultă că $5 \notin B$ şi $5 \notin C$, deci nu există două mulţimi B şi C cu proprietăţile date în problemă; 5. a) a=2^{883}–2^{882}–2^{881}=2^{881}(4–2–1)= 2^{881}, b=5^{442}–4·5^{441}–3·5^{440}=5^{440}(25–20–3)=2·5^{440}. Din calcule rezultă a<b, b) c+d=(a+b):2=5^{440}, iar suma dintre un număr par şi un număr impar este impară; 6. a) Observăm că 2011=3·661+7·4$\in$A, b) A=$\{0,3,6,7,9,10,12,13,14,15,...\}$, deci singurele pătrate care nu verifică sunt 1 şi 4; 7. a) 7=7, 36=7+29, 65=7+2·29, 94=7+3·29,..., 2008=7+29·69, deci mulţimea are 70 de termeni, b) suma elementelor lui A este 7·70+29(1+2+3+...+69)=70525; 8. Pentru n$\ge$5, U(1·2·3·...·n)=0$\Rightarrow$U(x)=3, U(y)$\in \{0,1,2,5,6,7\}$, deci pentru n$\ge$5 A şi B nu au elemente comune. Calculăm elementele lui A pentru $n \in \{1,2,3,4\}$, obţinem elementele 14,15,19,37 dintre care doar 37 aparţine şi lui B; 9. a) $A_9 = B \cup C$, unde $B = \{1;\ 4;\ 5;\ 8\}$ şi $C = \{2;\ 3;\ 6;\ 7\}$ sau $B = \{1;\ 4;\ 6;\ 7\}$ şi $C = \{2;\ 3;\ 5;\ 8\}$, b) Avem: $\{1,2,3,4\}$, cu $1+4=2+3$; $\{5,6,7,8\}$, cu $5+8=6+7$;..., $\{2001, 2002, 2003, 2004\}$, cu $2001+2004=2002+2003$, 4k−3+

4k=4k− 2+4k− 1, (k ≥ 1) $\Rightarrow B=\{1;\ 4;\ 5;\ 8;....;2001;2004\}$ şi $C=\{2;\ 3;\ 6;....;2003;2005\}$. Se verifică imediat că: $A_{2006}=B\bigcup C$ şi diferenţa sumelor celor două submulţimi este 2005; 10. a) $2008=4\cdot 2+5\cdot 400\in A$, b) $16n+10m+47=4(4n+3)+5(2m+7)\in A,\ \forall m,n\in N$; 11. Din condiţiile date observăm că m este par şi fiind prim $\Rightarrow$ m=2 $\Rightarrow$ p+4k=27, unde p=7, k=5 $\Rightarrow A=\{2,5,7\}$. Dacă $\overline{abcd}\in B\Rightarrow$ d=0, c=5, şi 9|(a+b+5) $\Rightarrow$ b=a+1 sau b=a−1, obţinem $\{a,b\}=\{6,7\}\Rightarrow A\bigcap B=\{5,7\}$.

Fişă de activitate

1. Se consideră mulţimile: $A=\{x \mid x=2m+1,\ m\in \mathbf{N}\}$ şi $B=\{y \mid y=3n+1,\ n\in \mathbf{N}\}$.
a) Arătaţi că $15\in A$, $16\in B$, $2005\in A\bigcap B$ şi $2002\in B-A$.
b) Scrieţi cu ajutorul unor proprietăţi caracteristice mulţimile $A\bigcap B$ şi $B-A$. (Sibiu, et. judeţeană)
2. Se dau mulţimile $A=\left\{\overline{ab}\in N \mid \overline{ab}\le 3(a+b)\right\}$ şi $B=\left\{\overline{xy}\in N \mid \overline{x1}+\overline{y1}-4y=3(x+y)\right\}$. Determinaţi mulţimile $A\bigcap B$ şi $A\setminus B$. (Vaslui, et. locală)
3. Mulţimile A şi B au următoarele proprietăţi: a) $A\bigcup B=\{1,2,3,4\}$; b) Fiecare mulţime are câte două elemente; c) Dacă $x\in A$, atunci $(x+1)\in B$. Determinaţi elementele mulţimilor A şi B. (Bucureşti, et. locală)
4. Să se determine mulţimile A şi B, ştiind că verifică simultan condiţiile: a) $A\bigcup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$;
b) $A\bigcap B=\{1,2\}$. (Hunedoara, et. judeţeană)
5. Să se determine mulţimile X şi Y care satisfac simultan condiţiile:
a) $3\in X\bigcap Y$; b) $X\setminus\{1,3\}=Y\bigcup\{2,4,5,7\}$; c) $Y\setminus\{1,3,6\}=X\bigcap\{2,4\}$; d) $X\bigcup Y\subset\{1,2,3,4,5,6,7\}$;
e) Mulţimea X are cu trei elemente mai mult decât mulţimea Y. Câte soluţii are problema ? (Bihor, et. locală)
6. Pentru o mulţime $A\subset N$ sunt îndeplinite simultan următoarele condiţii:
a) $1\in A$; b) dacă $x\in A$, atunci $3\cdot x\in A$; c) dacă $5\cdot x-4\in A$, atunci $x\in A$. Să se demonstreze că $11\in A$. (Galaţi, et. judeţeană)
7. Se consideră mulţimile $A=\{27,28,47\}$ şi $B_n=\{6n+5,9n+1,3n+5\}$ unde n este un număr natural nenul.
a) Determinaţi mulţimea $M=(B_1\bigcap B_2)\bigcup(A\bigcap B_3)$.
b) Determinaţi numerele naturale n pentru care $A\bigcap B_n\ne\varnothing$ (Caraş Severin, et. judeţeană)
8. Fie mulţimile: $A=\{7,\ 2p+1\}$ şi $B=\{1,\ p+5\}$. Determinaţi $p\in \mathbf{N}$ astfel încât reuniunea mulţimilor A şi B să aibă trei elemente. (Dolj, et. locală)
9. Determinaţi elementele mulţimilor: $A=\{x \mid x\in \mathbf{N},(2x+3)\mid 18\}$; $B=\{x \mid x\in \mathbf{N}, x\mid 14\}$.

Calculaţi apoi: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. (Giurgiu, et. judeţeană)

10. Se consideră mulţimea $X = \{1,3,5,7,...,2n+1\}$. Considerăm următorul şir de submulţimi ale mulţimii X astfel: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3,5\}$, $A_3 = \{7,9,11\}$ ş.a.m.d. a) Scrieţi mulţimile A_4 şi A_5; b) Calculaţi suma elementelor mulţimii A_{20}. (Concursul Micii matematicieni)

11. Mulţimea A are 50 elemente, iar mulţimea B are 30 elemente. Determinaţi numărul maxim şi numărul minim de elemente ale mulţimii $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. (Argeş, et. locală)

12. Fie $A \subset N$ o mulţime cu proprietăţile: a) $223 \in A$. b) Dacă $4x+3 \in A$, atunci $x \in A$. c) Dacă $x \in A$, atunci $6x+4 \in A$. Să se arate că 1342, 13 şi 2008 aparţin mulţimii A. (Vâlcea, et. judeţeană)

13. Fie A mulţimea primelor 1000 de numere naturale, în ordine crescătoare, care prin împărţire la 2008 dau restul un număr de două cifre.

a) Aflaţi suma primelor 90 de elemente ale mulţimii A.

b) Determinaţi al 500-lea element al mulţimii A.

c) Aflaţi câte numere din mulţimea A dau restul împărţirii la 2008 un pătrat perfect de două cifre. (Concursul La şcoala cu ceas-Rm. Vâlcea)

14. Se consideră mulţimile: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$, ... a) Să se determine cel mai mic element al mulţimii A_7. b) Să se determine mulţimea care conţine numărul 1000. (Hunedoara, et. locală)

15. În mulţimea $\{1,2,3,4,...,n\}$, 123 de numere se divid cu 2, dar nu se divid cu 4, iar 62 de numere se divid cu 4, dar nu se divid cu 8. Să se afle n. (Concursul Grigore Moisil-Cluj Napoca)