Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Filiala Bucureşti
Colegiul Naţional ,,Spiru Haret", Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare ,,Laurenţiu Panaitopol"
Institutul de Matematică al Academiei Române

Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14.11.2015

Clasa a VI-a

1. Ana face câte un sport în fiecare zi a săptămânii. În trei dintre zilele săptămânii, Ana aleargă. Niciodată ea nu aleargă în două zile consecutive. Lunea, Ana joacă baschet, iar miercurea ea se plimbă cu rolele. De asemenea, Ana înoată şi joacă tenis. Niciodată ea nu joacă tenis după ziua în care a alergat sau a înotat. În care dintre zilele săptămânii înoată Ana?

2. Avem 12 bancnote, unele cu valoarea de 5 lei, altele cu valoarea de 10 lei.
Grupând bancnotele în diverse moduri, putem obţine exact 17 sume nenule diferite. (O astfel de grupă poate fi formată şi cu o singură bancnotă.)
Câte bancnote cu valoarea de 5 lei avem la dispoziţie?

3. Numerele naturale a, b, c, d, e şi f sunt prime şi $a<b<c<d<e<f$. Restul împărţirii lui f la e este egal cu d, restul împărţirii lui e la d este egal cu c, restul împărţirii lui d la c este egal cu b, restul împărţirii lui c la b este egal cu a, iar restul împărţirii lui b la a nu este număr prim. Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a numărului f.

4. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,...,100\}$. Arătaţi că, oricum am alege 81 de elemente diferite din mulţimea A, există printre acestea două numere, a şi b, $a<b$, astfel încât numărul $\frac{b}{a}$ este natural şi egal cu o putere a lui 5.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 2 ore efectiv.

Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22.11.2013

Clasa a VI-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Ana face câte un sport în fiecare zi a săptămânii. În trei dintre zilele săptămânii, Ana aleargă. Niciodată ea nu aleargă în două zile consecutive. Lunea, Ana joacă baschet, iar miercurea ea se plimbă cu rolele. De asemenea, Ana înoată şi joacă tenis. Niciodată ea nu joacă tenis după ziua în care a alergat sau a înotat. În care dintre zilele săptămânii înoată Ana?

***

Răspuns: Sâmbătă

Notăm: A- alergare, B- baschet, R- role, I- înot, T- tenis.

Cu siguranţă, Ana aleargă marţi. În caz contrar, în cele patru zile rămase din săptămână ea trebuie să alerge de trei ori, prin urmare ar alerga cel puţin două zile consecutive. **2p**

Alcătuim următorul tabel. Fiecare linie reprezintă câte o variantă dintre cele rămase.

L	M	Mi	J	V	S	D
B	A	R	T	A	**I**	A
B	A	R	A	T	**I**	A
B	A	R	A		A	

În prima variantă, Ana nu poate juca tenis sâmbăta, după ce vinerea a alergat. Prin urmare, ea sâmbăta înoată, **2p**

În varianta a doua, Ana nu poate să înoate vinerea, deoarece a doua zi ar trebui să joace tenis. Prin urmare, ea joacă tenis vineri, iar sâmbăta înoată. **2p**

Varianta a treia nu este posibilă, deoarece Ana ar trebui să joace tenis după ce aleargă. **1p**

Problema 2

Avem 12 bancnote, unele cu valoarea de 5 lei, altele cu valoarea de 10 lei.

Grupând bancnotele în diverse moduri, putem obţine exact 17 sume nenule diferite. (O astfel de grupă poate fi formată şi cu o singură bancnotă.)

Câte bancnote cu valoarea de 5 lei avem la dispoziţie?

***

Răspuns: 7

Dacă am dispune numai de bancnote de 10 lei, am putea forma numai 12 sume nenule, fiecare fiind multiplu de 10.

Prin urmare există cel puţin o bancnotă de 5 lei. Astfel putem obţine toţi multiplii consecutivi ai lui 5 cel mult egali cu suma totală a valorilor bancnotelor.

Deducem că suma totală este egală cu $5 \cdot 17 = 85$ **4p**

Se deduce că există 7 bancnote de 5 lei. **3p**

Problema 3

4. Numerele naturale *a*, *b*, *c*, *d*, *e* şi *f* sunt prime şi $a < b < c < d < e < f$. Restul împărţirii lui *f* la *e* este egal cu *d*, restul împărţirii lui *e* la *d* este egal cu *c*, restul împărţirii lui *d* la *c* este egal cu b, restul împărţirii lui c la b este egal cu a, iar restul împărţirii lui b la a nu este număr prim. Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a numărului f.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Răspuns: $f=137$	
Din teorema împărţirii cu rest obţinem succesiv:	
$f=c_1 \cdot e+d$, $e=c_2 \cdot d+c$, $d=c_3 \cdot c+b$, $c=c_4 \cdot b+a$, $b=c_5 \cdot a+r$, unde $0 \le r < a$.	**1p**
Pentru ca f să fie mic, este necesar ca, atât r, câturile împărţirilor, precum şi numerele a, b, c, d, şi e să fie cât mai mici posibil.	**1p**
Dacă $r=0$, atunci c_5 ar fi 1, (altfel b nu ar fi prim), deci am obţine $a=b$, fals.	
Prin urmare, luăm $r=1$ şi $a=2$, pentru care obţinem $c_5=1$ (dacă c_5 este 0 ar rezulta că b nu este prim). Aşadar, $b=3$.	**1p**
Cum $c=c_4 \cdot 3+2$, obţinem $c_4=1$, pentru care $c=5$	**1p**
Atunci $d=c_3 \cdot 5+3$, pentru care obţinem $c_3=2$ şi $d=13$	**1p**
Obţinem $e=c_2 \cdot 13+5$, pentru care obţinem $c_4=2$ şi $e=31$	**1p**
În final, $f=c_1 \cdot 31+13$, pentru care obţinem $c_5=4$, deci $f=137$	**1p**

Problema 4

Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,...,100\}$. Arătaţi că, oricum am alege 81 de elemente diferite din mulţimea A, există printre acestea două numere, a şi b, $a<b$, astfel încât numărul $\frac{b}{a}$ este natural şi egal cu o putere a lui 5.

Selectată de prof. Cristian Mangra, Bucureşti

Numerele din $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt de forma $5^n \cdot c$, $n \in \{0,1,2\}$, iar c este prim cu 5. Pentru $n=2$, avem $c \le 4$ şi formăm 4 grupe: $\{1,5,25\}$, $\{2,10,50\}$, $\{3,15,75\}$, $\{4,20,100\}$. În fiecare dintre grupe, oricare două numere verifică cerinţa problemei. Asemănător, pentru $n=1$, formăm 12 grupe de forma $\{6,30\}$, $\{7,35\}$,..., $\{19,95\}$, în care intră câte un număr prim cu 5 mai mare decât 5 împreună cu multiplul său. În fiecare dintre grupe, cele două numere verifică cerinţa problemei. Pentru $n=0$, formăm ultimele 64 de grupe cu câte un număr prim cu 5, mai mare decât 20 şi mai mic decât 100. În final, am format $4+12+64=80$ de grupe.	**5p**
Prin urmare, conform principiului cutiei, luând 81 de numere din $A=\{1,2,3,...,100\}$, cel puţin două dintre ele se vor afla într-o grupă de două sau trei elemente, deci vor verifica cerinţa problemei.	**2p**