Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Filiala Bucureşti
Colegiul Naţional ,,Spiru Haret", Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare ,,Laurenţiu Panaitopol"
Institutul de Matematică al Academiei Române

Concursul naţional de matematică

“LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14.11.2015

Clasa a VII-a

1. Determinaţi cel mai mare număr natural divizibil cu 11 scris cu 10 cifre diferite.

2. Determinaţi fracţiile de forma $\frac{x}{y}$, unde x şi y sunt numere naturale nenule, ştiind că, dacă se măresc atât numărătorul precum şi numitorul cu 1, numărul reprezentat de fracţia obţinută este cu 10% mai mare decât numărul reprezentat de fracţia iniţială.

3. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ şi un punct M în interiorul său. Perpendiculara în A pe dreapta MA intersectează perpendiculara în B pe dreapta MB în punctul P şi perpendiculara în D pe dreapta MD în punctul Q. Perpendiculara în C pe dreapta MC intersectează perpendiculara în B pe dreapta MB în punctul S şi perpendiculara în D pe dreapta MD în punctul R. Arătaţi că:

a) $PR \perp QS$;

b) $MP + MQ + MR + MS \geq P_{ABCD}$, unde P_{ABCD} reprezintă perimetrul dreptunghiului $ABCD$. Când se obţine egalitatea?

4. Arătați că, dacă numărul p este prim, iar numărul natural a verifică relația $p^4 = 7a^4 + 2a^3 + 4$, atunci și a este număr prim.

Concursul naţional de matematică

"LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VII-a, Bucureşti, 22.11.2013

Clasa a VII-a

Soluţii şi bareme

Problema 1

Determinaţi cel mai mare număr natural divizibil cu 11 scris cu 10 cifre diferite.

Fie $n=\overline{a_1a_2...a_{10}}$ numărul cerut. Atunci $\{a_1,a_2,...,a_{10}\}=\{0,1,2,...,9\}$. Numărul n se divide cu 11 dacă şi numai dacă numărul $(a_1+a_3+...+a_9)-(a_2+a_4+...+a_{10})$ se divide cu 11.	**2p**
Cum $a_1+a_2+...+a_{10}=45$, deducem $(a_1+a_3+...+a_9)-(a_2+a_4+...+a_{10})=\pm 11$	**2p**
Pentru numărul maxim luăm $a_1+a_3+...+a_9=28$ şi $a_2+a_4+...+a_{10}=17$	**1p**
Considerăm $\{a_1,a_3,...,a_9\}=\{9,7,5,4,3\}$, iar $\{a_2,a_4,...,a_{10}\}=\{8,6,2,1,0\}$. Formăm numărul 9876534120.	**2p**

***

Problema 2

Determinaţi fracţiile de forma $\frac{x}{y}$, unde x şi y sunt numere naturale nenule ştiind că, dacă se măresc atât numărătorul precum şi numitorul cu 1, numărul reprezentat de fracţia obţinută este cu 10% mai mare decât numărul reprezentat de fracţia iniţială.

***

Fie $\frac{x}{y}$ o fracţie care verifică ipoteza. Atunci $\frac{x+1}{y+1}=\frac{11x}{10y}$.	**1p**
Ultima relaţie este echivalentă cu $(10-x)(11+y)=110$	**2p**
Cum $110=1\cdot 110=2\cdot 55=5\cdot 22$, iar $0<10-x<10$, obţinem soluţiile $\frac{x}{y}\in\left\{\frac{8}{44},\frac{5}{11},\frac{9}{99}\right\}$	**4p**

Problema 3

Se consideră un dreptunghi $ABCD$ şi un punct M în interiorul său. Perpendiculara în A pe dreapta MA intersectează perpendiculara în B pe dreapta MB în punctul P şi perpendiculara în D pe dreapta MD în punctul Q. Perpendiculara în C pe dreapta MC intersectează perpendiculara în B pe dreapta MB în punctul S şi perpendiculara în D pe dreapta MD în punctul R. Arătaţi că:

a) $PR\perp QS$;

b) $MP+MQ+MR+MS\geq P_{ABCD}$, unde P_{ABCD} reprezintă perimetrul dreptunghiului $ABCD$. Când se obţine egalitatea?

***

a) Fie *E* mijlocul segmentului $[MP]$ şi *F* mijlocul segmentului $[MR]$. Cum segmentele $[AE]$ şi $[BE]$ sunt mediane corespunzătoare ipotenuzei $[MP]$ în triunghiurile dreptunghice *PAM* şi respectiv *PBM*, rezultă că $EA = EB = \frac{MP}{2}$, deci punctul *E* este situat pe mediatoarea segmentului $[AB]$. Dacă *F* este mijlocul segmentului $[MR]$, raţionând analog, obţinem că punctul *F* este situat pe mediatoarea segmentului $[CD]$. Deoarece *ABCD* este dreptunghi, mediatoarele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ coincid. Deducem că dreapta *EF* este perpendiculară pe *AB*. Deoarece $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul *PMR*, rezultă că $EF \parallel PR$, deci $PR \perp AB$. Judecând asemănător, considerând mijloacele *G* şi *H* ale segmentelor $[MQ]$ şi $[MS]$, obţinem că $SQ \perp BC$. Cum $AB \perp BC$, rezultă concluzia.	**2p** **2p** **1p**
b) Aplicând inegalitatea triunghiului în triunghiurile *EAB*, *HAD*, *FDC* şi *GBC*, obţinem $EA + EB \geq AB$, $HA + HD \geq AD$, $FD + FC \geq DC$ şi $GC + GB \geq BC$. Însumând relaţiile, deducem concluzia. Egalitatea are loc când *ABCD* este pătrat, iar *M* este centrul său.	**2p**

Problema 4

Arătați că, dacă numărul p este prim, iar numărul natural *a* verifică relația

$p^4 = 7a^4 + 2a^3 + 4$, atunci și *a* este număr prim.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Prin calcul direct se arată că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă *n* este prim cu 5, atunci n^4 dă restul 1 la împărţirea cu 5. Din ecuație rezultă că cele două numere, *a* și *p*, au aceeași paritate. Pentru $p = 2$ nu se obțin soluții. Deci *p* este impar și prin urmare și *a* este impar. Dacă *p* și *a* sunt prime cu 5, atunci p^4 dă restul 1 la împărţirea cu 5, iar $7a^4$ dă restul 2 la împărţirea cu 5. Deci, ar trebui ca $2a^3$ să dea restul 0 la împărţirea cu 5, de unde $a \vdots 5$, fals. În concluzie este necesar ca $5 \mid p$ sau $5 \mid a$. Dacă $5 \mid a$ din ecuație rezultă că $5 \mid p^4 + 1$, ceea ce este fals. Dacă $5 \mid p$, cum *p* este prim, obţinem $p = 5$; deci $a^3(7a+2) = 621 = 3^3 \cdot 23$, adică $a = 3$, număr prim.	**1p** **1p** **1p**