

Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VIII-a, București, 14.11.2015

Clasa a VIII-a

1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și ecuația (*) $4x^4 + a^2 = 4x^2a + 1$ cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.
Determinați valorile lui a pentru care ecuația (*) are soluție unică.

2. Se consideră numerele reale pozitive x, y și z .

Demonstrați că, dacă $x + y + z = 1$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64$.

3. Se consideră două numere naturale nenule a și b care verifică egalitatea

$$a^2 - 4b^2 = b(8a + 1).$$

a) Arătați că b este pătrat perfect;

b) Dați exemplu de o pereche de numere naturale nenule (a, b) care verifică egalitatea din enunț.

4. Se consideră un semicerc ω de diametru $[AB]$ și un cerc γ tangent segmentului $[AB]$ în punctul C și tangent semicercului ω în punctul T . Fie $M \in \omega$, $N \in [CB]$ astfel încât $MN \perp AB$ și dreapta MN este tangentă cercului γ . Arătați că semidreapta $(MC$ este bisectoarea unghiului AMN .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore efectiv.

Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VIII-a, București, 14.11.2015

Clasa a VIII-a

Soluții și bareme

Problema 1

Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și ecuația (*) $4x^4 + a^2 = 4x^2a + 1$ cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.

Determinați valorile lui a pentru care ecuația (*) are soluție unică.

Răspuns: $a = 1$

Ecuația este echivalentă cu $(2x^2 - a)^2 = 1$, echivalentă cu $|2x^2 - a| = 1$

Obținem $2x^2 = a + 1$ sau $2x^2 = a - 1$

Dacă $a < -1$, atunci cele două ecuații de mai sus nu au soluții, deci ecuația (*) nu are soluții.

Dacă $a > -1$, ecuația $2x^2 = a + 1$ are două soluții, deci ecuația (*) are cel puțin 3 soluții.

Pentru $a = -1$, ecuația (*) are soluția unică $x = 0$.

2p

2p

2p

1p

Problema 2

Se consideră numerele reale pozitive x, y și z .

Demonstrați că, dacă $x + y + z = 1$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64$.

Avem $1 + \frac{1}{x} = \frac{2x + y + z}{x}$.

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică, obținem în

continuare $\frac{2x + (y + z)}{x} \geq \frac{2x + 2\sqrt{yz}}{x} \geq \frac{2(2\sqrt{x\sqrt{yz}})}{x} = \frac{4\sqrt{x\sqrt{yz}}}{x}$.

De asemenea $\frac{2y + (x + z)}{y} \geq \frac{4\sqrt{y\sqrt{xz}}}{y}$ și $\frac{2z + (x + y)}{z} \geq \frac{4\sqrt{z\sqrt{xy}}}{z}$.

Înmulțind membru cu membru cele trei inegalități, obținem concluzia.

1p

4p

2p

Problema 3

4. Se consideră două numere naturale nenule a și b care verifică egalitatea

$$a^2 - 4b^2 = b(8a + 1).$$

a) Arătați că b este pătrat perfect;

b) Dați exemplu de o pereche de naturale nenule (a, b) care verifică egalitatea din enunț.

<p>a) Relația este echivalentă cu $a^2 = b(4b + 8a + 1)$</p> <p>Dacă p este un divizor prim al lui b, atunci $p \mid a$, deci p nu divide pe $4b + 8a + 1$.</p> <p>Deducem că numerele b și $4b + 8a + 1$ sunt prime între ele.</p> <p>Înseamnă că numerele b și $4b + 8a + 1$ sunt pătrate perfecte.</p> <p>b) Dacă $b = 1$, egalitatea devine $a^2 = 8a + 5$. Cum numerele de forma $8a + 5$ nu sunt pătrate perfecte, ecuația obținută nu are soluție.</p> <p>Dacă $b = 4$, egalitatea devine $a^2 = 32a + 68$, echivalentă cu $(a - 16)^2 = 324$.</p> <p>Obținem $a - 16 = 18$, de unde obținem $a = 34$. Deci $(a, b) = (34, 4)$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>3p</p>
--	---

Problema 4

Se consideră un semicerc ω de diametru $[AB]$ și un cerc γ tangent segmentului $[AB]$ în punctul C și tangent semicercului ω în punctul T . Fie $M \in \omega$, $N \in [CB]$ astfel încât $MN \perp AB$ și dreapta MN este tangentă cercului γ . Arătați că semidreapta $(MC$ este bisectoarea unghiului AMN .

	<p>Fie H și T punctele în care dreptele TB și TA intersectează γ. Cum $m(ATB) = 90^\circ$, rezultă că $[HE]$ este diametru în γ.</p> <p>Cum centrul cercului γ, centrul semicercului și T sunt coliniare, rezultă că $[HE]$ este paralelă cu AB, deci $HE \perp MN$, adică H este punctul de tangență a dreptei MN cu cercul γ.</p> <p>Din puterea punctului B în raport cu cercul γ, avem $BC^2 = BH \cdot BT$. (1)</p> <p>Pe de altă parte, $m(MTB) = m(MAB) = m(HMB)$ (3), deci triunghiurile BHM și BMT sunt asemenea. Prin urmare, $BH \cdot BT = BM^2$ (2)</p> <p>Din (1) și (2) rezultă că triunghiul BMC este isoscel cu $BM = BC$. Deducem că $BMC \cong BCM$. Dar $m(AMC) = m(NCM) - m(CAM)$, iar</p> <p>$m(CMN) = m(CMB) - m(NMB)$. Din ultimele două relații, ținând seama de (3), rezultă concluzia.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
--	--	---