

Societatea de Științe Matematice din România, filiala București
Colegiul Național „Spiru Haret”, București
Centrul de Documentare și Informare „Laurențiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VIII-a, București, 14 noiembrie 2015

SUBIECTELE

Clasa a IX-a

1. Se consideră ecuația $\{x\}[x] = x$.
 - a) Arătați că ecuația nu are soluții strict pozitive.
 - b) Arătați că ecuația are o infinitate de soluții.
2. Arătați că, dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x \leq y \leq z$ și $xy + xz + yz = 1$, atunci $xz < \frac{1}{2}$.
3. Două tetraedre se numesc *de același tip* dacă le putem nota cu $A_1A_2A_3A_4$ și $B_1B_2B_3B_4$, astfel încât $A_iA_j = B_iB_j$ pentru orice $1 \leq i < j \leq 4$. Câte tipuri diferite de tetraedre au mulțimea lungimilor muchiilor $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$?
4. O mulțime M de 100 de puncte din plan are o parte dintre elemente colorate cu roșu și celelalte elemente colorate cu verde. Se știe că orice dreaptă care conține cel puțin două elemente ale mulțimii conține un număr egal de puncte din cele două culori. Arătați că toate punctele din M sunt coliniare.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VIII-a, București, 14 noiembrie 2015

Soluții și barem de corectare - clasa a IX-a

1. Se consideră ecuația $\{x\}[x] = x$.

a) Arătați că ecuația nu are soluții strict pozitive.

b) Arătați că ecuația are o infinitate de soluții.

Soluție. a) Dacă $[x] > 0$, atunci $\{x\}[x] < [x] \leq x$, iar dacă $[x] = 0$ atunci $\{x\}[x] = 0 < x$ **3p**

b) Pentru $x \leq 0$, ecuația este $\{x\} = \frac{[x]}{[x]-1}$ **1p**

Ea are soluțiile $[x] = -n$, $\{x\} = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ **3p**

2. Arătați că, dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x \leq y \leq z$ și $xy + xz + yz = 1$, atunci $xz < \frac{1}{2}$.

Soluție. Dacă $x \leq 0 \leq z$, atunci $xz \leq 0 < \frac{1}{2}$ **1p**

Dacă $z < 0$, atunci $1 > xy + xz \geq 2xz$ **1p**

Dacă $x > 0$ atunci $x + z > 0$ și $y = \frac{1-xz}{x+z}$ **2p**

Din $y \geq x$ reiese $1 - xz \geq x(x+z)$, deci $2xz \leq 1 - x^2 < 1$ (cazul $x = 0$ este evident) **3p**

3. Două tetraedre se numesc *de același tip* dacă le putem nota cu $A_1A_2A_3A_4$ și $B_1B_2B_3B_4$, astfel încât $A_iA_j = B_iB_j$ pentru orice $1 \leq i < j \leq 4$. Câte tipuri diferite de tetraedre au mulțimea lungimilor muchiilor $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$?

Soluție. Observăm că există exact două tipuri de tetraedre care au muchiile opuse (a, b) , (c, d) , (e, f) : cel în care din vârful $a \cap c$ pornește e și cel în care din vârful $a \cap c$ pornește f **2p**

Muchia de lungime 10 poate fi opusă oricăreia dintre celelalte 5, iar în fiecare caz muchiile rămase se pot grupa în perechi în 3 moduri, deci există 15 posibilități de grupare a muchiilor în perechi de muchii opuse **4p**

Obținem astfel 30 de tipuri de tetraedre **1p**

4. O mulțime M de 100 de puncte din plan are o parte dintre elemente colorate cu roșu și celelalte elemente colorate cu verde. Se știe că orice dreaptă care conține cel puțin două elemente ale mulțimii conține un număr egal de puncte din cele două culori. Arătați că toate punctele din M sunt coliniare.

Soluție. Considerăm o dreaptă d care trece prin două puncte din M , un punct roșu $R \in d$ și un punct verde $V \in d$. Presupunem că M are și puncte în afara lui d **1p**

Considerăm dreptele r_1, r_2, \dots determinate de R și punctele din afara lui d . Pe fiecare dintre aceste drepte se află – în afara lui R – mai multe puncte verzi decât roșii **4p**

Deoarece fiecare punct din afara lui d se află pe exact una dintre dreptele r_1, r_2, \dots , în afara lui d sunt mai multe puncte verzi decât roșii **1p**

Pornind analog de la V deducem că în afara lui d se află mai multe puncte roșii decât verzi – contradicție **1p**