Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret", Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol"
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14 noiembrie 2015

SUBIECTELE

Clasa a X-a

1. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} xy + zt = -1 \\ xz + yt = -1 \\ xt + yz = -1 \end{cases} \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z}$$

2. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea punctelor planului şi $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea: pentru orice triunghi ABC din plan, având centrul de greutate G, avem $f(A) + f(B) + f(C) = 3f(G)$.

a) Daţi un exemplu de astfel de funcţie care să nu fie constantă.

b) Arătaţi că dacă f este neconstantă, atunci mulţimea valorilor lui f este infinită.

3. În câteva cutii sunt puse, în total, un număr de $2N$ pixuri: N pixuri roşii şi N pixuri negre (unde N este un număr natural). Se ştie că în fiecare cutie se află cel mult N pixuri.

Arătaţi că putem împărţi pixurile la N persoane, astfel încât fiecare persoană să primească două pixuri de culori diferite, luate din cutii diferite.

4. Arătaţi că, dacă toate înălţimile unui triunghi sunt mai mari sau egale cu 1, atunci perimetrul triunghiului este cel puţin $2\sqrt{3}$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14 noiembrie 2015

Soluţii şi barem de corectare - clasa a X-a

1. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} xy + zt = -1 \\ xz + yt = -1 \\ xt + yz = -1 \end{cases} \quad x, y, z, t \in \mathbb{Z}$$

Soluţie Prin scăderea primei ecuaţii din celelalte rezultă $(x-t)(z-y) = 0$ şi $(x-z)(t-y) = 0$ **2p**

Astfel, cel puţin trei necunoscute sunt egale **2p**

Din motive de simetrie este suficient să analizăm cazul $y = z = t$; obţinem $y(x+y) = -1$, cu soluţiile $x = -2$, $y = z = t = 1$ şi $x = 2$, $y = z = t = -1$ **2p**

Prin simetrie mai obţinem încă 6 soluţii **1p**

2. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea punctelor planului şi $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea: pentru orice triunghi ABC din plan, având centrul de greutate G, avem $f(A) + f(B) + f(C) = 3f(G)$.

a) Daţi un exemplu de astfel de funcţie care să nu fie constantă.

b) Arătaţi că dacă f este neconstantă, atunci mulţimea valorilor lui f este infinită.

Soluţie. a) Fixăm un sistem de coordonate în plan şi luăm, de exemplu, $f(M) = x_M + y_M$ **3p**

b) Dacă mulţimea valorilor lui f este finită, există un punct M în care f ia valoarea minimă m **2p**

Dacă $A \neq M$ este un punct din plan, există un triunghi ABC cu centrul de greutate în M. Din $f(A) \geq m$, $f(B) \geq m$, $f(C) \geq m$ şi $f(A) + f(B) + f(C) = 3f(M) = 3m$ reiese $f(A) = m$ cu A arbitrar, adică f este constantă – contradicţie **2p**

3. În câteva cutii sunt puse, în total, un număr de $2N$ pixuri: N pixuri roşii şi N pixuri negre (unde N este un număr natural). Se ştie că în fiecare cutie se află cel mult N pixuri.

Arătaţi că putem împărţi pixurile la N persoane, astfel încât fiecare persoană să primească două pixuri de culori diferite, luate din cutii diferite.

Soluţie. Dacă există o cutie C care conţine exact jumătate din pixuri, atunci numărul pixurilor roşii/negre din C este egal cu numărul pixurilor negre/roşii din celelalte cutii şi grupăm fiecare pix din C cu câte un pix de culoarea opusă din celelalte cutii **3p**

În caz contrar, grupăm un pix roşu dintr-o cutie oarecare K cu unul negru din altă cutie (este posibil, deoarece K nu poate conţine toate pixurile negre). Obţinem o configuraţie cu proprietăţile configuraţiei iniţiale, dar mai puţine pixuri. Cerinţa rezultă acum inductiv (cazul $N = 1$ este evident) **4p**

4. Arătaţi că, dacă toate înălţimile unui triunghi sunt mai mari sau egale cu 1, atunci perimetrul triunghiului este cel puţin $2\sqrt{3}$.

Soluţie. Din $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ şi $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$ rezultă $S \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$, unde notaţiile sunt cele uzuale **3p**

Apoi $6S = \sum a h_a \geq \sum a = 2p$, deci $p \leq 3S$ **2p**

Obţinem $p \leq \frac{\sqrt{3}}{3}p^2$, de unde $p \geq \sqrt{3}$ şi concluzia **2p**