Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14 noiembrie 2015

SUBIECTELE

Clasele XI-XII

1. Rezolvaţi ecuaţia $\log_2(\log_2(1+\cos 4x)) + 2\sin x \sin 5x = 2^{2^{1+\cos 6x}}$.

2. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ şi

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + 7}{a_n}$$

pentru $n \geq 1$. Arătaţi că toţi termenii şirului sunt numere întregi.

3. Demonstraţi că funcţia

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2+x}}} + \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2+x}}}$$

este strict monotonă.

4. Determinaţi funcţiile injective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea $2f(f(n)) \leq n + f(n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România, filiala Bucureşti
Colegiul Naţional „Spiru Haret”, Bucureşti
Centrul de Documentare şi Informare „Laurenţiu Panaitopol”
Institutul de Matematică al Academiei Române

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „LAURENŢIU PANAITOPOL”

Ediţia a VIII-a, Bucureşti, 14 noiembrie 2015

Soluţii şi barem de corectare - clasa a IX-a

1. Se consideră ecuaţia $\{x\}[x] = x$.
a) Arătaţi că ecuaţia nu are soluţii strict pozitive.
b) Arătaţi că ecuaţia are o infinitate de soluţii.
Soluţie. a) Dacă $[x] > 0$, atunci $\{x\}[x] < [x] \leq x$, iar dacă $[x] = 0$ atunci $\{x\}[x] = 0 < x$ **3p**
b) Pentru $x \leq 0$, ecuaţia este $\{x\} = \frac{[x]}{[x]-1}$ **1p**
Ea are soluţiile $[x] = -n$, $\{x\} = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ **3p**

2. Arătaţi că, dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x \leq y \leq z$ şi $xy + xz + yz = 1$, atunci $xz < \frac{1}{2}$.
Soluţie. Dacă $x \leq 0 \leq z$, atunci $xz \leq 0 < \frac{1}{2}$ **1p**
Dacă $z < 0$, atunci $1 > xy + xz \geq 2xz$ **1p**
Dacă $x > 0$ atunci $x + z > 0$ şi $y = \frac{1-xz}{x+z}$ **2p**
Din $y \geq x$ reiese $1 - xz \geq x(x + z)$, deci $2xz \leq 1 - x^2 < 1$ (cazul $x = 0$ este evident) **3p**

3. Două tetraedre se numesc *de acelaşi tip* dacă le putem nota cu $A_1A_2A_3A_4$ şi $B_1B_2B_3B_4$, astfel încât $A_iA_j = B_iB_j$ pentru orice $1 \leq i < j \leq 4$. Câte tipuri diferite de tetraedre au mulţimea lungimilor muchiilor $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$?

Soluţie. Observăm că există exact două tipuri de tetraedre care au muchiile opuse (a, b), (c, d), (e, f): cel în care din vârful $a \cap c$ porneşte e şi cel în care din vârful $a \cap c$ porneşte f **2p**

Muchia de lungime 10 poate fi opusă oricăreia dintre celelalte 5, iar în fiecare caz muchiile rămase se pot grupa în perechi în 3 moduri, deci există 15 posibilităţi de grupare a muchiilor în perechi de muchii opuse **4p**

Obţinem astfel 30 de tipuri de tetraedre **1p**

4. O mulţime M de 100 de puncte din plan are o parte dintre elemente colorate cu roşu şi celelalte elemente colorate cu verde. Se ştie că orice dreaptă care conţine cel puţin două elemente ale mulţimii conţine un număr egal de puncte din cele două culori. Arătaţi că toate punctele din M sunt coliniare.

Soluţie. Considerăm o dreaptă d care trece prin două puncte din M, un punct roşu $R \in d$ şi un punct verde $V \in d$. Presupunem că M are şi puncte în afara lui d **1p**

Considerăm dreptele r_1, r_2, ... determinate de R şi punctele din afara lui d. Pe fiecare dintre aceste drepte se află – în afara lui R – mai multe puncte verzi decât roşii **4p**

Deoarece fiecare punct din afara lui d se află pe exact una dintre dreptele $r_1, r_2, \ldots$, în afara lui d sunt mai multe puncte verzi decât roşii **1p**

Pornind analog de la V deducem că în afara lui d se află mai multe puncte roşii decât verzi – contradicţie **1p**