XI. CONGRUENŢA modulo n

Fie $m \geq 2$ un număr natural. Pentru orice numere naturale a,b spunem că a şi b sunt congruente modulo m şi notăm $a \equiv b$ (mod m) dacă a şi b dau acelaşi rest la împărţirea cu m. Avem $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow$ m divide $a-b$.

Proprietăţi

1) reflexivitate $a \equiv a$ (mod m), pentru orice $a \in N$.

2) simetrie dacă $a \equiv b$ (mod m), atunci $b \equiv a$ (mod m)

3) tranzitivitate dacă $a \equiv b$ (mod m) şi $b \equiv c$ (mod m), atunci $a \equiv c$ (mod m)

Proprietate

Dacă a,b sunt numere naturale, atunci $a \equiv b$(modm) dacă şi numai dacă există k natural astfel ca $a=b+km$.

Probleme rezolvate

1. Dacă $a \equiv b$ (mod m) şi $c \equiv d$ (mod m), demonstraţi că $a+c \equiv b+d$ (mod m).

Rezolvare:

Fie a,b,c,d cele patru numere $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow$ m divide $a-b$ şi $c \equiv d$ (mod m) $\Leftrightarrow$ m divide $c-d$. Dacă adunăm cele două relaţii rezultă că m divide $(a-b)+(c-d) \Leftrightarrow$ m divide $(a+c)-(b+c) \Rightarrow a+c \equiv b+d$ (mod m).

2. Dacă $a \equiv b$ (mod m) demonstraţi că $na \equiv nb$ (mod m), pentru orice număr natural n.

Rezolvare:

Din relaţia $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow$ m divide $a-b \Rightarrow$ m divide $na-nb \Rightarrow na \equiv nb$ (mod m).

3. Dacă $a \equiv b$ (mod m) demonstraţi că $a^k \equiv b^k$ (mod m), pentru orice număr natural k.

Rezolvare:

Din relaţia $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow$ m divide $a-b \Rightarrow$ m divide $(a-b)(a^{k-1} + a^{k-2} \cdot b + a^{k-3} \cdot b^2 + \ldots + b^{k-1}) \Leftrightarrow$ m divide $a^k - b^k \Rightarrow a^k \equiv b^k$.

4. Să se arate că pentru orice $k \in N$, $37 | (1000^k - 1)$.

Rezolvare:

Observăm că $1000=37 \cdot 27 + 1$, deci $1000 \equiv 1$ (mod37) $\Rightarrow 1000^k \equiv 1$(mod37).

5. Ce rest dă numărul $N=36^{36}+21^{21}$ la împărţirea cu 5?

Rezolvare:

Avem $36 \equiv 1$(mod5) $\Rightarrow 36^{36} \equiv 1$(mod5), $21 \equiv 1$(mod5) $\Rightarrow 21^{21} \equiv 1$(mod5), adunând cele două relaţii $\Rightarrow$ $36^{36} + 21^{21} \equiv 2$(mod5), deci N dă restul 2 la împărţirea cu 5.

6. Dacă $a \equiv b$ (mod m) şi $c \equiv d$ (mod m), demonstraţi că $ac \equiv bd$ (mod m).

Rezolvare:

Fie a,b,c,d cele patru numere $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow$ $ac \equiv bc$ (mod m) şi $bc \equiv bd$ (mod m) $\Rightarrow$ din proprietatea de tranzitivitate că $ac \equiv bd$ (mod m).

7. Să se determine restul împărţirii numărului 14^{37} prin 17.

Rezolvare:

Orice număr natural nenul se scrie ca sumă de puteri ale lui $2 \Rightarrow 37=2^5+2^2+2^0$ $\Rightarrow 14^{37}=14^{32} \cdot 14^4 \cdot 14$. Pe de altă parte $14^2 \equiv 9$(mod17), $14^4 \equiv 13$(mod17), $14^8 \equiv 16$(mod17), $14^{16} \equiv 1$(mod17), $14^{32} \equiv 1$(mod17) $\Rightarrow$ $14^{37}=14^{32} \cdot 14^4 \cdot 14 \equiv 1 \cdot 13 \cdot 14$(mod17) $\equiv 12$(mod17), deci restul împărţirii numărului 14^{37} prin 17 este 12.

8. Care este ultima cifră a numărului $N=2^{222} + 3^{333} + 4^{444}$?

Rezolvare:

Trebuie să stabilim restul la împărţirea cu 10 a lui N. $2^4 \equiv 6$(mod10), prin ridicare la puterea 55, obţinem $2^{220} \equiv 6^{55} \equiv 6$(mod10) $\Rightarrow 2^{222} \equiv 6 \cdot 2^2$(mod10) $\Rightarrow$ $2^{222} \equiv 4$(mod10). Apoi $3^4 \equiv 1$(mod10), apoi prin ridicare la puterea 83 obţinem $3^{332} \equiv 1^{83} \equiv 1$(mod10) $\Rightarrow$ $3^{333} \equiv 3$(mod10). Avem $4^2 \equiv 6$(mod10) şi prin ridicare la puterea 222 obţinem $4^{444} \equiv 6^{222} \equiv 6 (\text{mod}10)$. Prin adunarea congruenţelor obţinem că $2^{222} + 3^{333} + 4^{444} \equiv 4+3+6 \equiv 13(\text{mod}10) \equiv 3(\text{mod}10)$, deci ultima cifră a lui N este 3.

9. Care sunt ultimele două cifre ale numărului $19^{41} \cdot 9^{93}$?

Rezolvare:

Ultimele două cifre ale numărului $19^{41} \cdot 9^{93}$ reprezintă restul împărţirii la 100. Avem 19^5=2476099, deci $19^5 \equiv 99(\text{mod}100)$. Prin ridicare la puterea 8 obţinem $19^{40} \equiv 1(\text{mod}100) \Rightarrow 19^{41} \equiv 19(\text{mod}100)$. 9^{10}=3486784401, deci $9^{10} \equiv 1(\text{mod}100)$, prin ridicare la puterea 9 rezultă $9^{90} \equiv 1(\text{mod}100) \Rightarrow 9^{93} \equiv 729(\text{mod}100) \Rightarrow 9^{93} \equiv 29(\text{mod}100)$. Prin înmulţirea celor două relaţii $\Rightarrow 19^{41} \cdot 9^{93} \equiv 19 \cdot 29(\text{mod}100) \equiv 51(\text{mod}100)$, deci ultimele două cifre ale numărului $19^{41} \cdot 9^{93}$ sunt 51.

Probleme propuse

1. Ce rest dă numărul $7^{7007} \cdot 11^{1001}$ la împărţirea cu 6?
2. Fie $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k \geq 2$ numere prime între ele şi a, b numere naturale astfel încât $a \equiv b(\text{mod}m_1)$, $a \equiv b(\text{mod}m_2)$, $a \equiv b(\text{mod}m_3), \ldots$, $a \equiv b(\text{mod}m_k)$. Demonstraţi că $a \equiv b(\text{mod}m)$, unde $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k$.
3. Să se arate că ecuaţia $x^3 + y^4 = 7$ nu are soluţii naturale.
4. Fie a,b,c,d,e cifre în baza 10, cu $a \neq 0$. Să se arate că $\overline{abcde} \equiv e - d + c - b + a \ (\text{mod}11)$.
5. Să se arate că numărul $2004+2004^2+2004^3+\ldots+2004^{2003}$ se divide cu 2003. (Vaslui, et. judeţeană)
6. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_7$ şapte numere pătrate perfecte. Să se arate că există două dintre ele a căror diferenţă este multiplu de 20. (Galaţi, et. locală)
7. Să se determine ultimele două cifre ale numărului $a = 10^2 + 101^2 + 1002^2 + 10003^2 + 100004^2$ (Gazeta matematică, seria B)
8. Să se verifice că pentru $p \in \{2,3,5,7,11\}$ şi $x \in N$ are loc $x^{p-1} \equiv 0$ sau $1(\text{mod}p)$.
9. Determinaţi toate perechile de numere prime (p,q) astfel încât $p^3 - q^5 = (p+q)^2$ (Olimpiadă Rusia)
10. Să se arate că numărul $1642^{2009} + 310^{90} + 3132^{1000}$ se divide prin 31.

Soluţii probleme propuse

1. Din $7 \equiv 1(\text{mod}6) \Rightarrow 7^{7007} \equiv 1(\text{mod}6)$ şi $11 \equiv 5(\text{mod}6) \Rightarrow 11^{1001} \equiv 5(\text{mod}6) \Rightarrow$ restul împărţirii numărului $7^{7007} \cdot 11^{1001}$ la 6 este 5; 2.Din definiţia dată a−b se divide cu m_1, a−b se divide cu m_2, a−b se divide cu m_3, …, a−b se divide cu m_k $\Rightarrow$ a−b se divide cu $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$, cum aceste numere sunt prime între ele atunci a−b se divide cu $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k$; 3. Se alege congruenţa modulo 13 şi avem $x^3 \equiv 0,1,5,8,12(\text{mod}13)$, $y^4 \equiv 0,1,3,9 \ (\text{mod}13) \Rightarrow x^3+y^4 \neq 0 \ (\text{mod}13)$; 4. $\overline{abcde}$=e+(11−1)d+(99+1)c+(1001−1)b+(9999+1)a, de unde rezultă afirmaţia; 5. $2004 \equiv 1(\text{mod}2003)$, atunci $2004^k \equiv 1(\text{mod}2003)$, adunând termenii obţinem $S \equiv 0(\text{mod}2003)$; 6. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0,1,4,5,9. Conform principiului cutiei există $a_m > a_n$ care au aceeaşi ultimă cifră. Fie $a_m = q^2$ şi $a_n = p^2 \Rightarrow 10|(q^2 - p^2) \Rightarrow$ q şi p au aceeaşi paritate $\Rightarrow a_m - a_n = 4t$, de unde rezultă concluzia; 7. Se calculează restul împărţirii la 100; 8. Exemplu pentru p=3 avem x=1, $x^2 \equiv 1(\text{mod}p)$, x=2, $x^2 \equiv 1(\text{mod}p)$; 9. Dacă $p \neq 3$ şi $q \neq 3$, atunci $p \equiv 1,2 \ (\text{mod}3)$ şi $q \equiv 1,2(\text{mod}3)$. Dacă $p \equiv q \ (\text{mod}3)$, atunci membrul stâng este multiplu de de 3, iar cel drept nu este. Dacă p nu este congruent cu q (mod3), atunci membrul drept este multiplu de de 3, iar cel stâng nu este. Singura soluţie este p=7, q=3; 10. Considerăm congruenţa modulo 31 şi obţinem prin adunare că $1642^{2009} + 310^{90} + 3132^{1000} \equiv 0(\text{mod}31)$.

Fişă de activitate

1. Ce rest dă numărul $N=2008^{2007}$ la împărţirea cu 15?
2. Demonstraţi că $2^{2^{6n+2}} \equiv 16\,(\mathrm{mod}19)$, pentru orice $n \in N$.
3. Se consideră trei numere naturale a,b,c astfel încât $a^3+b^3+c^3 \equiv 0(\mathrm{mod}3)$. Demonstraţi că $abc \equiv 0(\mathrm{mod}3)$.
4. Care este ultima cifră a numărului $N=3^{44}+5^{44}+6^{77}$?
5. Determinaţi numerele n de trei cifre ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile: $n \equiv 2(\mathrm{mod}7)$, $n \equiv 2(\mathrm{mod}11)$, $n \equiv 2(\mathrm{mod}13)$
6. Fie p număr prim şi a un număr natural. Atunci $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\ p)$.
7. Să se determine un număr care împărţit la 3 dă restul 1, împărţit la 5 dă restul 3 şi este multiplu de 7.
8. Se consideră numărul $x=2^{n+1}\cdot 5^n + 2^n\cdot 5^{n+1} + 2012$, unde $n \in N$, $n \geq 4$. Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului x la 3. (Sibiu, et. locală)
9. Fie a,b,c,d,e cifre în baza 10, cu $a \neq 0$. Să se arate că $\overline{abcde} \equiv e\ (\mathrm{mod}2)$.
10. Fie $p \geq 2$ astfel încât $(p-1)!+1 \equiv 0(\mathrm{mod}p)$. Demonstraţi că p este prim.
11. Determinaţi ultimele trei cifre ale numărului 4^{404}, ştiind că ultimele trei cifre ale numărului 2^{100} sunt 376.
12. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Demonstraţi că $(n+1)^n \equiv 1(\mathrm{mod}n)$ şi $(n+1)^n \equiv 1(\mathrm{mod}n^2)$.
13. Ce rest se obţine la împărţirea numărului 53^{53} cu 9?
14. Fie p>0, p prim şi x număr natural astfel încât p divide x. Demonstraţi că $x^{p(p-1)} \equiv 1(\mathrm{mod}p^2)$.
15. Demonstraţi că dacă $p>0$, $q>0$, $p \neq q$, sunt numere prime astfel încât $x^p \equiv y^p(\mathrm{mod}p)$ şi $x^q \equiv y^q(\mathrm{mod}q)$, atunci $x \equiv y\ (\mathrm{mod}pq)$.
16. Să se arate că dacă p>0 este un număr prim, atunci restul împărţirii produsului $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(p-1)$ la $1+2+3+\ldots+(p-1)$ este $p-1$.
17. Rezolvaţi ecuaţia $x^4+y^4=3026$ ştiind că x şi y sunt numere naturale prime.
18. Ce rest dă numărul n^3, n număr natural la împărţirea cu 13?

19. Aflaţi numerele naturale prime n şi p ştiind că verifică egalitatea $n^2+p^2=n+2005$.

20. Fie $A=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n+2011$, unde $n\geq24$

a) Calculaţi restul împărţirii lui A la 5^3;

b) Arătaţi că A nu este pătrat perfect.

21. Fie p un număr prim şi a un număr natural astfel încât $a^2\equiv1(\mathrm{mod}\,p)$. Demonstraţi că $a+1\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$ sau $a-1\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$.

22. Fie a,b,c,d,e cifre în baza 10, cu $a\neq0$. Să se arate că $\overline{abcde}\equiv\overline{de}(\mathrm{mod}\,4)$.

23. Să se determine restul împărţirii numărului 4^{35} la 12.