Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi numărul real x, ştiind că numerele 7, $3x$ şi x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9}=32^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând o submulţime a mulţimii $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\right\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$ şi $C(1,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A=\frac{3\pi}{4}$ şi $BC=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(10)\right)=1024$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x, ştiind că $A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)$.

5p **c)** Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2017.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=a$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstraţi că $f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$7+x^2+2=2\cdot 3x$	**3p**
	$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.	$\Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$\left(2^{-1}\right)^{4x-9}=2^{5x} \Leftrightarrow -4x+9=5x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6=64$ de submulțimi, deci sunt 64 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2=1+6+15=22$ de submulțimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{22}{64}=\dfrac{11}{32}$	**1p**
5.	Punctul $M(1,\,2)$ este mijlocul laturii BC	**1p**
	$m_{AM}=\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AM este $y=x-1$	**2p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=$	**3p**
	$=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(10)=\begin{pmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(10)\right)=\begin{vmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2^{10}=1024$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$	**2p**
	$A(3x)=A\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$ şi $x_2=2$	**3p**
c)	Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x şi y, obținem $A(n)=$ $=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)=A(1+2+3+\ldots+2016)=A(2017\cdot 1008)$	**3p**
	$n=2017\cdot 1008$, deci n este număr natural divizibil cu 2017	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-5\cdot 0+a=$ $=0-0+a=a$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5(x_1+x_2+x_3)-3a=-3a$ $-3a=2016-4a \Leftrightarrow a=2016$	**3p** **2p**
c)	Presupunem că f are cel puțin două rădăcini întregi x_1 și x_2; cum $x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3\in\mathbb{Z}$ Știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$, dacă $x_1^2\ge x_2^2\ge x_3^2$, obținem $x_1^2=9$, $x_2^2=1$ și $x_3^2=0$ Deoarece pentru valorile pe care le obținem pentru x_1, x_2 și x_3, relația $x_1+x_2+x_3=0$ nu este verificată, polinomul f are cel mult o rădăcină întreagă	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-x'-1'=$ $=e^x-\frac{1}{2}\cdot 2x-1=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Aplicând succesiv teorema lui l'Hospital, obținem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=1$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=e^x-1>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f' strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ și cum $f'(0)=0$, obținem $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ $0<2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1=$ $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(-x^2\right)\left(1-x^2\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n și $x\in[0,1]$ avem $-x^2\le 0$ și $\left(1-x^2\right)^n\ge 0$, deci $I_{n+1}\le I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=\left.x\left(1-x^2\right)^{n+1}\right\|_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^2\right)^n(-2x)dx=$ $=2(n+1)\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\int_0^1\left(1-x^2-1\right)\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**