CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VI–a

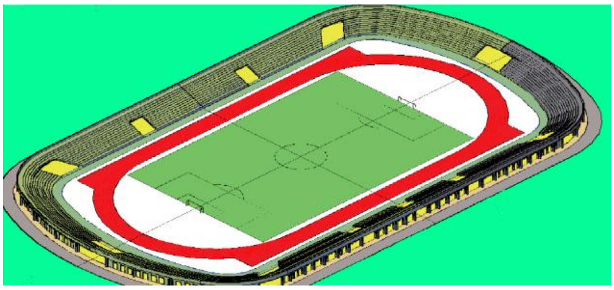
P1. a) Din mulțimea tuturor tripletelor de numere naturale consecutive, care sunt prime două câte două, determină tripletul format din cele mai mici trei numere a căror sumă este divizibilă cu 47.

b) Determină cele mai mici patru numere naturale consecutive a căror sumă este un număr natural de 4 cifre distincte format doar din cifrele numărului 2015.

c) Există o submulțime S a mulțimii $M=\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ care să aibă 43 de elemente și produsul elementelor sale să fie pătrat perfect? (justifică răspunsul)

Luminița Bucureșteanu și Sorin Furtună, Călărași

P2. Pe pista de atletism a stadionului din desenul alăturat aleargă, de plăcere, 53 de oameni. Toți aleargă în același sens și suma vârstelor celor 53 de alergători este 2015 ani. La un moment dat, nu există doi alergători la egalitate și ei sunt răspândiți pe toată lungimea pistei. Arată că, la acest moment, există cel puțin un alergător pentru care suma dintre vârsta lui, vârsta alergătorului plasat exact în spatele său și a celui care aleargă exact în fața sa este un număr mai mare decât 114.



Gabriela Ruse, Călărași

P3. O alee de lățime 1 metru și lungime n metri $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$ se pavează cu n plăci pătrate care au lungimea laturii de 1 metru, fiecare fiind albă sau neagră. O pavare este bună dacă pentru orice placă din cele n, placa din dreapta ei este neagră sau placa din stânga ei este albă (*vezi desenul alăturat*). Câte pavări bune se pot face pentru un n dat?

Vasile Pop, Cluj Napoca

P4. Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a>b\geq 3$, $a+b \mid ab+1$ și $a-b \mid ab-1$, arătați că $a^2\leq 2\left(b^2-1\right)$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Succes

Barem de corectare: Problema 1. a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; Problema 2. 7 puncte; Problema 3. 7 puncte; Problema 4. 7 puncte.

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VI–a

P1. a) Din mulțimea tuturor tripletelor de numere naturale consecutive, care sunt prime două câte două, determină tripletul format din cele mai mici trei numere a căror sumă este divizibilă cu 47.

b) Determină cele mai mici patru numere naturale consecutive a căror sumă este un număr natural de 4 cifre distincte format doar din cifrele numărului 2015.

c) Există o submulțime S a mulțimii $M=\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ care să aibă 43 de elemente și produsul elementelor sale să fie pătrat perfect? (justifică răspunsul)

Luminița Bucureșteanu și Sorin Furtună, Călărași

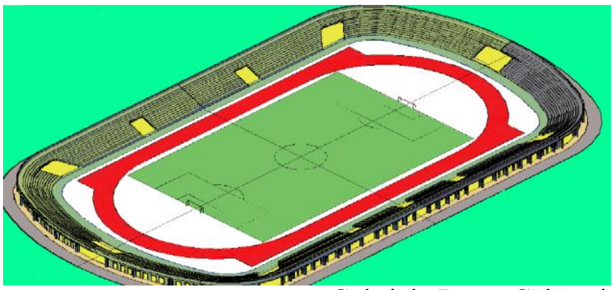
Soluție

a) numerele sunt de forma $2k-1,\ 2k,\ 2k+1;\ 47 \mid 6k \Rightarrow 2k \geq 94$; numerele sunt 93, 94, 95;

b) dacă $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$ sunt numerele căutate și S este suma lor rezultă $4 \mid S-6$; cerințele problemei sunt satisfăcute pentru $S=1250$; numerele sunt: 311, 312, 313, 314.

c) Condiția necesară ca produsul elementelor submulțimii S să fie pătrat perfect este ca acesta să nu conțină un multiplu al lui 13 și numerele 29, 31, 37, 41, 43, 47. Produsul elementelor mulțimii $M / \{26, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ este $\left(2^{23}\cdot 3^{11}\cdot 5^{6}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\right)^{2}$.

P2. Pe pista de atletism a stadionului din desenul alăturat aleargă, de plăcere, 53 de oameni. Toți aleargă în același sens și suma vârstelor celor 53 de alergători este 2015 ani. La un moment dat, nu există doi alergători la egalitate și ei sunt răspândiți pe toată lungimea pistei. Arată că, la acest moment, există un cel puțin un alergător pentru care suma dintre vârsta lui, vârsta alergătorului plasat exact în spatele său și a celui care aleargă exact în fața sa este un număr mai mare decât 114.



Gabriela Ruse, Călărași

Soluție

La momentul respectiv se fixează un alergător și se numerotează pozițiile, în sensul în care se aleargă, cu 1, 2, …, 53. Notăm vârsta alergătorului care aleargă în poziția n cu a_n, $n \in \{1, 2, \ldots, 53\}$. Presupunem că:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \leq 114,\ n=\overline{1,51},\ a_{52}+a_{53}+a_1 \leq 114,\ a_{53}+a_1+a_2 \leq 114 \Rightarrow$$

$$3(a_1+a_2+\ldots+a_{53}) \leq 53\cdot 114 \Rightarrow 6045 \leq 6042$$, contradicție.

P3. O alee de lățime 1 metru și lungime n metri $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ se pavează cu n plăci pătrate care au lungimea laturii de 1 metru, fiecare fiind albă sau neagră. O pavare este bună dacă pentru orice placă din cele n, placa din dreapta ei este neagră sau placa din stânga ei este albă (*vezi desenul alăturat*). Câte pavări bune se pot face pentru un n dat?

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Deoarece înaintea primei plăci (în stânga) nu există altă placă (albă) rezultă că a doua placă va fi cu siguranţă neagră. Deoarece în dreapta ultimei plăci nu există altă placă (neagră) rezultă că penultima placă va fi cu siguranţă albă. Vom arăta că singura pavare bună este cu plăci de culori alternante negru, alb, negru, alb,. . . , negru, alb şi în consecinţă n trebuie să fie număr par şi există o singură pavare bună.

Dacă prin absurd prima placă ar fi neagră (ca şi a doua), atunci în stânga plăcii a doua nu e placă albă deci în dreapta avem placă neagră (astfel că primele trei plăci ar fi negre). Raţionând la fel cu plăcile negre a doua şi a treia rezultă că şi a patra placă este neagră şi în mod analog ar rezulta că şi a $(n-1)$ placă (penultima) ar fi neagră, ceea ce am văzut că este fals. În concluzie prima placă este albă şi a doua este neagră. Dacă a treia placă ar fi neagră avem plăcile consecutiv doi şi trei negre şi ca la raţionamentul anterior ar rezulta că următoarele (inclusiv penultima) ar fi negre. Astfel că primele trei sunt alb, negru, alb şi nu pot exista două consecutive de aceeaşi culoare. Cum a $(n-1)$ placă este albă rezultă că $(n-1)$ este impar deci n este par.

P4. Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a > b \geq 3$, $a+b \mid ab+1$ și $a-b \mid ab-1$, arătați că $a^2 \leq 2\left(b^2-1\right)$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție

Demonstrație: $\left.\begin{matrix} d' \mid a \\ d' \mid b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d' \mid a+b \\ d' \mid ab \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d' \mid ab+1 \\ d' \mid ab \end{matrix}\right\} \Rightarrow d' \mid 1 \Rightarrow (a,\ b)=1$; $\left.\begin{matrix} d \mid a+b \\ d \mid a-b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid 2b \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} d \mid 2a \\ d \mid 2b \\ (a,\ b)=1 \\ d \text{ impar} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a-b,\ a+b)=1\ (1); \quad \left.\begin{matrix} a+b \mid (a+b)b \\ a+b \mid ab+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b \mid (a+b)b-(ab+1) \Rightarrow a+b \mid b^2-1\ (2);$$

$$\left.\begin{matrix} a-b \mid ab-1 \\ a-b \mid (a-b)b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a-b \mid (ab-1)-b(a-b) \Rightarrow a-b \mid b^2-1\ (3); \text{ din } (1),\ (2) \text{ și } (3) \Rightarrow a^2-b^2 \mid b^2-1 \text{ și}$$

$b^2-1 \neq 0 \Rightarrow a^2-b^2 \leq b^2-1 \Leftrightarrow a^2+1 \leq 2b^2\ (4)$; a^2+1 impar, $2b^2$ par si $(4) \Rightarrow a^2+2 \leq 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 2\left(b^2-1\right)$.