CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VII–a

P1. Pentru $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,$ se consideră propoziția:

„Mulțimea $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots, n\}$ admite două submulțimi B și C care au proprietățile:

1. fiecare din mulțimile B și C conține cel puțin două elemente;
2. $B \cup C = A$;
3. $B \cap C$ este mulțimea vidă;
4. suma elementelor mulțimii B este egală cu produsul elementelor mulțimii C.”

Arătați că:

a) dacă $n = 4,$ atunci propoziția este falsă;

b) pentru orice $n \geq 5,$ propoziția este adevărată.

Gabriela Ruse, Călărași

P2. Găsește toate perechile de numere naturale nenule $(n,\ m)$ cu proprietatea $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{25}.$

Adriana Constantin, Călărași

P3. Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a > b \geq 3,\ a + b \mid ab + 1$ și $a - b \mid ab - 1,$ arătați că $a^2 \leq 2\left(b^2 - 1\right).$

Gheorghe Stoianovici, Călărași

P4. Fie $ABCD$ un paralelogram care are măsura unghiului A egală cu 60°. Dacă bisectoarea unghiului B intersectează diagonala AC în punctul M și latura DC în punctul N, bisectoarea unghiului D intersectează diagonala AC în punctul P și latura AB în punctul Q iar patrulaterul $BNDQ$ este romb arătați că $AC = 3MP.$

Aurelia Cațaros, Călărași

P5. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi $m\left(ACB\right) = 75^0$. În interiorul unghiului ABC se consideră semidreptele $[BE$ şi $[BM$ astfel încât $m\left(ABE\right) = 15^0$ şi $m\left(MBC\right) = 30^0$, $E, M \in (AC)$. Perpendiculara în M pe BM intersectează AB în N. Dacă D este mijlocul laturii $[BC]$ şi P este piciorul perpendicularei din A pe BE, demonstrați că $MD = NP.$

Sorin Furtună, Călărași

P6. Fie ABC un triunghi, d_1 simetrica dreptei BC față de dreapta BA și d_2 simetrica dreptei CB față de dreapta $CA.$ O dreaptă care trece prin punctul A și nu intersectează segmentul $[BC],$ intersectează dreapta d_1 în punctul M și dreapta d_2 în punctul $N.$ Să se arate că $BM + CN = BC$ dacă și numai dacă $m\left(BAC\right) = 90^0.$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Succes

Barem de corectare: Problema 1. a) 2 puncte; b) 2 puncte; Problema 2. 3 puncte; Problema 3. 7 puncte; Problema 4. 3 puncte; Problema 5. 4 puncte; Problema 6. 7 puncte.

CONCURSUL INTERNAȚIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VII–a

P1. Pentru $n\in\mathbb{N},\ n\geq 4,$ se consideră propoziția:

„Mulțimea $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,n\}$ admite două submulțimi B și C care au proprietățile:

1. fiecare din mulțimile B și C conține cel puțin două elemente;
2. $B\cup C=A$;
3. $B\cap C$ este mulțimea vidă;
4. suma elementelor mulțimii B este egală cu produsul elementelor mulțimii C.”

Arătați că:

a) dacă $n=4,$ atunci propoziția este falsă;

b) pentru orice $n\geq 5,$ propoziția este adevărată.

Gabriela Ruse, Călărași

Soluție:

a) pentru niciuna din cele 6 partiții cu proprietățile 1., 2. și 3. nu este adevărată proprietatea 4. ;

b)

i) $k\in\mathbb{N},\ k\geq 3\Rightarrow 1+2+3+\ldots+2k-\left[1+(k-1)+2k\right]=k(2k+1)-3k=1\cdot(k-1)\cdot 2k$

ii) $k\in\mathbb{N},\ k\geq 2\Rightarrow 1+2+3+\ldots+(2k+1)-(1+k+2k)=(k+1)(2k+1)-3k-1=1\cdot k\cdot 2k$

P2. Găsește toate perechile de numere naturale nenule $(n,\ m)$ cu proprietatea $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{25}.$

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: dacă $n=m\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{25}\Leftrightarrow n=m=50;$ dacă $n\neq m$ putem presupune $n<m$; presupunem $n\geq 50\Rightarrow m>50\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{m}<\frac{1}{25},$ fals $\Rightarrow n<50\leq m;$ $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{25}\Leftrightarrow(n-25)(m-25)=5^4\Leftrightarrow$

$\begin{cases}n-25=1\\ m-25=5^4\end{cases}$ sau $\begin{cases}n-25=5\\ m-25=5^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=26\\ m=650\end{cases}$ sau $\begin{cases}n=30\\ m=150\end{cases};$ perechile de numere naturale nenule $(n,\ m)$ cu proprietatea $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{25},$ sunt: $(50,\ 50),\ (26,\ 650),\ (650,\ 26),\ (30,\ 150),\ (150,\ 30).$

P3. Dacă a este un număr natural par iar b este un număr natural impar astfel încât $a>b\geq 3,\ a+b\,|\,ab+1$ și $a-b\,|\,ab-1,$ arătați că $a^2\leq 2\left(b^2-1\right).$

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție

Demonstrație: $\left.\begin{matrix}d'|a\\ d'|b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}d'|a+b\\ d'|ab\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}d'|ab+1\\ d'|ab\end{matrix}\right\}\Rightarrow d'|1\Rightarrow(a,\ b)=1;$ $\left.\begin{matrix}d\,|a+b\\ d\,|a-b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}d\,|2a\\ d\,|2b\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}d\,|2a\\ d\,|2b\\ (a,\ b)=1\\ d\text{ impar}\end{matrix}\right\}\Rightarrow(a-b,\ a+b)=1\ (1);$ $\left.\begin{matrix}a+b|(a+b)b\\ a+b|ab+1\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+b|(a+b)b-(ab+1)\Rightarrow a+b|b^2-1\ (2);$

$\left.\begin{matrix}a-b|ab-1\\ a-b|(a-b)b\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-b|(ab-1)-b(a-b)\Rightarrow a-b|b^2-1\ (3);$ din $(1),\ (2)$ și $(3)\Rightarrow a^2-b^2|b^2-1$ și

$b^2-1\neq 0\Rightarrow a^2-b^2\leq b^2-1\Leftrightarrow a^2+1\leq 2b^2\ (4);$ a^2+1 impar, $2b^2$ par si $(4)\Rightarrow a^2+2\leq 2b^2\Leftrightarrow a^2\leq 2\left(b^2-1\right).$

P4. Fie $ABCD$ un paralelogram care are măsura unghiului A egală cu 60°. Dacă bisectoarea unghiului B intersectează diagonala AC în punctul M și latura DC în punctul N, bisectoarea unghiului D intersectează diagonala AC în punctul P și latura AB în punctul Q iar patrulaterul $BNDQ$ este romb arătați că $AC = 3MP$.

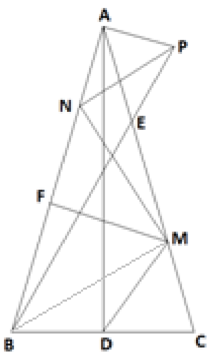
Aurelia Cațaros, Călărași

Indicație: M este centrul de greutate al triunghiului ΔBCD și P este centrul de greutate al triunghiului ΔABD

P5. Fie triunghiul isoscel *ABC*, cu *AB* = *AC* şi $m(ACB) = 75^0$. În interiorul unghiului ABC se consideră semidreptele $[BE$ şi $[BM$ astfel încât $m(ABE) = 15^0$ şi $m(MBC) = 30^0$, $E, M \in (AC)$. Perpendiculara în *M* pe *BM* intersectează *AB* în *N*. Dacă *D* este mijlocul laturii $[BC]$ şi *P* este piciorul perpendicularei din *A* pe *BE*, demonstraţi că $MD = NP$.

Sorin Furtună, Călărași

Soluție



$m(ABM) = 75^0 - 30^0 = 45^0 \Rightarrow \triangle BMN$ - dreptunghic şi isoscel. Ducem

$MF \perp BN, F \in (BN) \Rightarrow MF = \dfrac{BN}{2}$

$m(BAC) = 180^0 - 2 \cdot 75^0 = 30^0 \Rightarrow MF = \dfrac{AM}{2}$ din $\triangle$ dreptunghic AFM. Deci

$BN = AM \Rightarrow AN = MC$ (1)

$m(BEC) = 45^0 \Rightarrow m(AEP) = m(EAP) = 45^0$

$\triangle ABD \equiv \triangle BAP (IU) \Rightarrow BD = AP \Rightarrow DC = AP$ (2)

$m(NAP) = 30^0 + 45^0 = 75^0 \Rightarrow m(NAP) = m(MCD)$ (3)

Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow \Delta NAP \equiv \Delta MCD \Rightarrow MD = NP$

P6. Fie ABC un triunghi, d_1 simetrica dreptei BC față de dreapta BA și d_2 simetrica dreptei CB față de dreapta CA. O dreaptă care trece prin punctul A și nu intersectează segmentul $[BC]$, intersectează dreapta d_1 în punctul M și dreapta d_2 în punctul N. Să se arate că $BM + CN = BC$ dacă și numai dacă $m(BAC) = 90^0$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. " $\Leftarrow$ " Dacă $\widehat{BAC} = 90^\circ$ simetricul lui M faţă de AB este un punct $M' \in BC$ astfel ca $BM = BM'$.

Pe de altă parte $\widehat{MAB} = \widehat{BAM'}$, $\widehat{M'AC} = 90^\circ - \widehat{BAM'}$ şi

$$\widehat{MAC} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{MAB} = 90^\circ - \widehat{MAB},$$

astfel că $\widehat{NAC} = \widehat{M'AC}$ şi $\triangle ACN \equiv \triangle ACM'$, deci $CM' = CN$.

În concluzie $BM + CN = BM' + CM' = BC$.

" $\Rightarrow$ " Dacă $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$ atunci $\widehat{M'AC} \neq \widehat{NAC}$ şi dacă $\widehat{M'AC} < \widehat{MAC}$ atunci $M'C < NC$ şi $MB + NC > BC$ dacă $\widehat{M'AC} > \widehat{NAC}$ atunci $M'C > NC$ şi $MB + NC < BC$.