CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN"

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VIII–a

P1. Dacă M este mulțimea numerelor naturale n cu proprietatea că $2\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$ este număr natural, atunci arată că toate elementele mulțimii M sunt divizibile cu 3.

Viorica Stoianovici, Călărași

P2. Există numere x care nu sunt întregi, cu proprietatea: $x+\frac{2015}{x}=[x]+\frac{2015}{[x]}$? (justifică răspunsul)

(cu $[x]$ este notat cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real x)

Adriana Constantin, Călărași

P3. Găsește toate numerele reale $x\in(0,\infty)$ cu proprietatea: $\frac{x^2+4}{x}+\frac{x^2+8}{x+1}+\frac{x^2+12}{x+2}+\ldots+\frac{x^2+2016}{x+503}=2016.$

Adriana Olaru, Călărași

P4. În cele 5 vârfuri și în cele 5 mijloace de laturi ale unui pentagon convex sunt scrise numerele de 1 la 10 astfel ca pentru orice latură suma numerelor din capetele ei și a numărului din mijloc să fie aceeași: S. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua S.

Vasile Pop, Cluj Napoca

P5. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Dacă $m(\measuredangle A)=60^\circ$, $AB<AC$, $M\in(AC)$, $MB=AB$ și O aparține interiorului triunghiului ABM, atunci arată că:

a) patrulaterul $OBCM$ este inscriptibil;

b) $OM=\frac{\sqrt{3}}{3}(2AB-AC)$.

Cristina Bornea, Călărași

P6. Fie M un punct interior triunghiului ABC și $MC\cap AB=\{C'\}$, $MB\cap AC=\{B'\}$. Notăm cu S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor $C'MB$, $B'MC$, BMC.

a) Să se arate că $S_3^2>S_1\cdot S_2$.

b) Să se determine în funcție de S_1, S_2, S_3 aria patrulaterului $AC'MB'$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Succes

Barem de corectare: Problema 1. 4 puncte; Problema 2. 4 puncte; Problema 3. 4 puncte; Problema 4. 4 puncte; Problema 5. a) 2 puncte; b) 3 puncte; Problema 6. a) 3 puncte; b) 4 puncte.

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

Ediția a XX - a, Călărași, 24 octombrie 2015

Clasa a VIII–a

P1. Dacă M este mulțimea numerelor naturale n cu proprietatea că $2\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$ este număr natural, atunci arată că toate elementele mulțimii M sunt divizibile cu 3.

Viorica Stoianovici, Călărași

Soluție: Fie $n\in M \Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{N}$, astfel încât $2\sqrt{2+\sqrt{4+n}}=k,\ (*)\Leftrightarrow 16\left(n+k^2\right)=k^4 \Rightarrow \exists m\in\mathbb{N}$, astfel încât $k=2m\Rightarrow(*)\Leftrightarrow n=m(m-2)m(m+2)\Rightarrow 3|m.$

P2. Există numere x care nu sunt întregi, cu proprietatea: $x+\dfrac{2015}{x}=[x]+\dfrac{2015}{[x]}$? (justifică răspunsul)

(cu $[x]$ este notat cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real x)

Adriana Constantin, Călărași

Soluție: $x+\dfrac{2015}{x}=[x]+\dfrac{2015}{[x]}\Leftrightarrow x[x]=2015\Leftrightarrow x=-\dfrac{403}{9}\in(-45,\ -44)$

P3. Găsește toate numerele reale $x\in(0,\infty)$ cu proprietatea: $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{x^2+8}{x+1}+\dfrac{x^2+12}{x+2}+\ldots+\dfrac{x^2+2016}{x+503}=2016.$

Adriana Olaru, Călărași

Soluție: I) presupunem $x=2\Rightarrow\dfrac{2^2+4}{2}+\dfrac{2^2+8}{2+1}+\dfrac{2^2+12}{2+2}+\ldots+\dfrac{2^2+2016}{2+503}=2016;$

II) presupunem $x\neq 2\Rightarrow\dfrac{x^2+4k+4}{x+k}>4\Leftrightarrow(x-2)^2>0,\ \forall x\in(0,\infty),\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{x^2+8}{x+1}+\dfrac{x^2+12}{x+2}+\ldots+\dfrac{x^2+2016}{x+503}>2016.$

P4. În cele 5 vârfuri și în cele 5 mijloace de laturi ale unui pentagon convex sunt scrise numerele de 1 la 10 astfel ca pentru orice latură suma numerelor din capetele ei și a numărului din mijloc să fie aceeași: S. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua S.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Fie V suma numerelor din vârfuri şi M suma numerelor din mijloacele laturilor. Avem:

$$V+M=1+2+\ldots+10=55. \tag{1}$$

Pe de altă parte dacă notăm cu L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 suma numerelor de pe laturi, avem:

$$2V+M=5S \tag{2}$$

(fiecare vârf se adună de două ori).

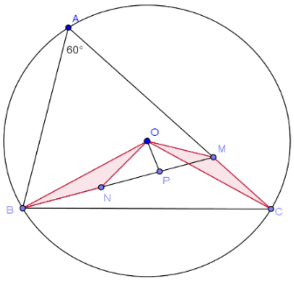
Din relaţia (2) rezultă că suma este maximă când V este maxim şi suma este minimă când V este minim.

$$V_{min}=1+2+3+4+5=15,\quad M=40\quad \text{şi}\quad S_{min}=14$$

$$V_{max}=6+7+8+9+10=40,\quad M=15\quad \text{şi}\quad S_{max}=19.$$

Repartiţiile numerelor sunt: Pentru S_{min} în vârfuri 1, 3, 5, 2, 4 pe laturi 10, 6, 7, 8, 9. Pentru S_{max} în vârfuri 10, 8, 6, 9, 7 şi pe laturi 1, 5, 4, 3, 2.

P5. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Dacă $m(\measuredangle A)=60^\circ$, $AB<AC$, $M\in(AC)$, $MB=AB$ și O aparține interiorului triunghiului ABM, atunci arată că:



a) patrulaterul $OBCM$ este inscriptibil;

b) $OM=\frac{\sqrt{3}}{3}(2AB-AC)$.

Cristina Bornea, Călărași

Soluție:

În $\Delta ABM, m(\measuredangle A)=60^\circ, AB=BM \Rightarrow \Delta ABM$ echilateral $\Rightarrow m(\measuredangle BMA)=60^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow m(\measuredangle BMC)=120^\circ\\ m(\measuredangle BOC)=2m(\measuredangle A)=120^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \measuredangle BMC\equiv\measuredangle BOC\Rightarrow OBCM \text{ inscriptibil}\Rightarrow \measuredangle OBM\equiv\measuredangle OCM$$

Construim $BN=MC, N\in BM$

$$\xrightarrow{L.U.L}\Delta OBN\equiv\Delta OCM\Rightarrow[ON]\equiv[OM], \measuredangle BON\equiv\measuredangle COM$$

$$\Rightarrow m(\measuredangle BOC)=m(\measuredangle MON)=120^\circ$$

ΔNOM isoscel $\Rightarrow m(\measuredangle OMN)=30^\circ$

$$\text{În } \Delta OPM\left(m(\measuredangle OPM)=90^\circ\right)\Rightarrow \cos 30^\circ=\frac{PM}{OM}=\frac{\frac{1}{2}MN}{OM}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BM-BN}{2OM}$$

$$\Rightarrow\frac{AM-MC}{OM}=\sqrt{3}\Leftrightarrow OM=\frac{\sqrt{3}}{3}(2AB-AC).$$

P6. Fie M un punct interior triunghiului ABC și $MC\cap AB=\{C'\}$, $MB\cap AC=\{B'\}$. Notăm cu S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor $C'MB$, $B'MC$, BMC.

a) Să se arate că $S_3^2>S_1\cdot S_2$.

b) Să se determine în funcție de S_1, S_2, S_3 aria patrulaterului $AC'MB'$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. a) Avem

$$S_3^2>S_1\cdot S_2\Leftrightarrow\frac{S_3}{S_1}>\frac{S_2}{S_3}\Leftrightarrow\frac{MC}{MC'}>\frac{MB'}{MB}\Leftrightarrow$$
$$MC\cdot MB>MC'\cdot MB'\Leftrightarrow\mathcal{A}(BMC)>\mathcal{A}(B'MC')\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{A}(BMC)+\mathcal{A}(BMC')>\mathcal{A}(B'MC')+\mathcal{A}(BMC')\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{A}(BC'C)>\mathcal{A}(BC'B')\Leftrightarrow$$
$$d(C,AB)>d(B',AB)\Leftrightarrow CA>B'A \text{ (relaţie adevărată).}$$

b) Împărţim patrulaterul în două triunghiuri: $\triangle AMC'$ de arie x_1 şi $\triangle AMB'$ de arie x_2. Avem:

$$\frac{x_1}{S_1}=\frac{x_1+x_2+S_2}{S_1+S_3},\quad\frac{x_2}{S_2}=\frac{x_1+x_2+S_1}{S_2+S_3}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1\cdot S_3-x_2\cdot S_1=S_1\cdot S_2\\ x_1\cdot S_2-x_2\cdot S_3=-S_1\cdot S_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{S_1S_2(S_1+S_3)}{S_3^2-S_1S_2}\\ x_2=\dfrac{S_1S_2(S_2+S_3)}{S_3^2-S_1S_2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\mathcal{A}(AC'MB')=x_1+x_2=\frac{S_1S_2(S_1+S_2+2S_3)}{S_3^2-S_1S_2}$$