IX. PUTERI

Pentru a şi n numere naturale notăm a^n=.
$a^0 = 1$, $a^1 = a$, 0^0 *nu are sens*
Proprietăţi:
$1^n = 1$, *oricare ar fi n număr natural*
$0^n = 0$, *oricare ar fi n număr natural nenul*
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, *oricare ar fi a,b,m,n numere naturale*
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$a^n : b^n = (a:b)^n$
Observaţie:
Compararea puterilor
a) dacă puterile au aceaşi bază, se compară exponenţii: pentru mn;
b) dacă puterile au acelaşi exponent, se compară bazele: pentru ;
c) dacă puterile au exponenţi diferiţi şi baze diferite, atunci se aduc puterile la aceaşi bază sau la acelaşi exponent.
Ultima cifră a unei puteri
Notăm U(n) ultima cifră a numărului natural n.
$U(5^k)=5$, *oricare ar fi kN.*
$U(6^k)=6$, *oricare ar fi kN.*
$U(1^k)=1$, *oricare ar fi kN.*
$U(2^{4k})=6$, $U(2^{4k+1})=2$, $U(2^{4k+2})=4$, $U(2^{4k+3})=8$
$U(3^{4k})=1$, $U(3^{4k+1})=3$, $U(3^{4k+2})=9$, $U(3^{4k+3})=7$
$U(7^{4k})=1$, $U(7^{4k+1})=7$, $U(7^{4k+2})=9$, $U(7^{4k+3})=3$
$U(8^{4k})=6$, $U(8^{4k+1})=8$, $U(8^{4k+2})=4$, $U(8^{4k+3})=2$
$U(4^{2k})=6$, $U(4^{2k+1})=4$
$U(9^{2k})=1$, $U(9^{2k+1})=9$

Probleme rezolvate

- Să se compare numerele:

Rezolvare:
Observăm că: şi , deoarece

- Opt numere naturale diferite n_1, n_2, n_3, …n_8 sunt scrise în ordine crescătoare şi verifică egalitatea

. Aflaţi cele opt numere. (Giurgiu, et. locală)
Rezolvare:
Deoarece $n_1<n_2<\ldots<n_8$ dăm factor comun pe n_1=2·1003n_1=1, =1003=2·501n_2–n_1=1n_2=2, analog n_3–n_2=2n_3=4, n_4=6, n_5=7, n_6=8, n_7=9, n_8=10

- Fie numerele $a = 6^3 \cdot 8^4$ şi $b = 2^9 \cdot 12^3$. Arătaţi că numerele a şi b sunt egale. (Călăraşi, et. locală)

Rezolvare:
şi a=b.

• Fie numerele şi unde şi . Comparaţi numerele A şi B. (Cluj, et. locală)

Rezolvare:

, ,

, ,

. Observăm că b>aB = b − a > 0 =AB > A.

• Aflaţi ultima cifră a numărului $n=7+7^2+7^3+....+7^{2011}$. (Buzău, et. locală)

Rezolvare:

Observăm că $U(7^{4k})=1$, $U(7^{4k+1})=7$, $U(7^{4k+2})=9$, $U(7^{4k+3})=3U(7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3})=0$. Grupăm termenii sumei câte 4 şi cum $2011=4\cdot502+3U(7+7^2+7^3+....+7^{2011})=U(7^3)=3$.

• Ştiind că , nN, să se afle restul împărţirii la 5 a numărului $S=2^n+3^n+4^n+7^n$. (Argeş, et. locală)

Rezolvare:

6n + 13=4n + 267 n=127$S=2^{127}+3^{127}+4^{127}+7^{127}$. Calculăm $U(2^{127})=U(2^{124}\cdot2^3)=U(2^3)=8$, $U(3^{127})=U(3^{124}\cdot3^3)=U(3^3)=7$, $U(4^{127})=U(4^{126}\cdot4)=U(4)=4$, $U(2^{127})=U(7^{124}\cdot7^3)=U(7^3)=3$
U(S)=2restul împărţirii lui S la 5 este 2.

• a) Demonstraţi că între două puteri naturale consecutive ale lui 3 se găsesc cel puţin o putere a lui 2 şi cel mult două puteri ale lui 2.

b) Suma numerelor naturale prime distincte a,b,c ordonate crescător este 10. Aflaţi numerele naturale x,y,z, ştiind că a^{bc-x}, b^{ac-y}, c^{ab-z} sunt pătrate perfecte. (Gorj, et. locală)

Rezolvare:

a) folosim metoda reducerii la absurd şi presupunem că între 3^n şi 3^{n+1} nu se află nicio putere a lui 2, deci există m N, astfel încât $2^m < 3^n < 3^{n+1} < 2^{m+1}2^{m+1}: 2^m > 3^{n+1}: 3^n$, deci 2 > 3, contradicţie , rezultă că între 3^n şi 3^{n+1} se află cel puţin o putere a lui 2. Pentru a demonstra că între 3^n şi 3^{n+1} se află cel mult două puteri ale lui 2, presupunem că între 3^n şi 3^{n+1} se află trei puteri ale lui 2, deci există m N, astfel încât $3^n < 2^m < 2^{m+1} < 2^{m+2} < 3^{n+1}3^{n+1}: 3^n > 2^{m+2}: 2^m$, deci 3 > 4, contradicţie!; b) Deoarece a < b < c şi a,b,c sunt numere prime, rezultă a=2, b=3, $c=52^{15-x}$ este pătrat perfect dacă x, 3^{10-y} este pătrat perfect dacă y, 5^{6-z} este pătrat perfect dacă z.

• Determinaţi toate numerele naturale x, y care verifică relaţia: $2^x + 2^y + 2^{x+y} = 44$. (Concursul „Şcoala cu ceas”- Rm. Vâlcea)

Rezolvare:

Presupunem x < y $2^x(1+2^{y-x}+2^y) = 2^2\cdot11$x=2 şi $2^{y-x}+2^y = 102^{y-x}+2^y = 2+2^3$y=3. Analog pentru y < x

• Determinaţi numerele naturale m,n şi p astfel încât =2012. (Bucureşti, et. locală)

Rezolvare:

Observăm că $13^2 < 2012 < 13^3$, deci p. Pentru p=0=2011. Cum 1999>1999−=> 680, deci nu avem soluţii. Pentru p=1=1999, deci n3. Cum 1999>1999−=> 668, deci nu avem soluţii. Pentru p=2=1843 < 11^4. Deci n. Dacă n=3, obţinem 8^m =512=83, deci m=3. Dacă n2, rezultă că > 1843, deci nu avem soluţii.

• Să se determine ultimele patru cifre ale numărului $A = 2^{2007} - 2^{2001} - 2^{2000}$. (Bistriţa-Năsăud, et. locală)

Rezolvare:

Dând factor comun se obţine $A = 2^{2007} - 2^{2001} - 2^{2000} = 2^{2000}(2^7 - 2 - 1) = 2^{2000}\cdot125$, $125 = 5^3$, $2^{2000} = 2^{1997}.\ 2^3$, $A = 2^{1997}\cdot2^3\cdot5^3 = 2^{1997}\cdot1000$ultimele trei cifre vor fi zerouri având înmulţire cu 1000, cea de a patra cifră, de la sfârsit, va fi ultima cifră al lui 2^{1997} $U(2^{1997}) = U(2^{4\cdot499+1}) = U(2^{4\cdot499})\cdot2 = U(16^{499})\cdot2 = U(6\cdot2) = 2$ultimele patru cifre ale numărului A sunt 2000.

• Arătaţi că 2^{1000}, scris în baza 10, are cel puţin 301 cifre. (Dolj, et. locală)

Rezolvare:
Observăm că 2^{10}=1024, deci are 4 cifre, de unde rezultă că $(2^{10})^{100} > (10^3)^{100}$, ceea ce demonstrează că
$2^{1000} > 10^{300}$, dar cum 10^{300} are 301 cifre rezultă că 2^{1000} are cel puţin 301 cifre.

Probleme propuse
- Aflaţi ultima cifră a numărului a=1·2·3·...·n +. (Bucureşti, et. locală)
- Ordonaţi crescător numerele: $x=2^{1653} - 2^{1652} - 2^{1651}$, $y=3^{993} - 2\cdot3^{992} - 2\cdot3^{991} - 3^{990}$ şi $z=7^{662} + 9\cdot7^{660} - 8\cdot7^{661}$. (Satu Mare, et. locală)
- Comparaţi numerele 2^{92} şi 3^{62}. (Maramureş, et. locală)
- Arătaţi că nu există numere naturale x şi y care să verifice egalitatea $5\cdot x^2 + 3\cdot y^2 = 8^{2006}$. (Brăila, et. locală)
- Fie kN. Aflaţi restul împărţirii numărului la 5. (Braşov, et. locală)

6. Fie şi , nN.
a) Comparaţi numerele a şi b.
b) Arătaţi că numerele a şi b dau acelaşi rest la împărţirea cu 165, oricare ar fi nN. (Caraş-Severin, et. locală)

- Determinaţi restul împărţirii la 5 a numărului A=. (Dâmboviţa, et. locală)
- Demonstraţi că numărul a= se divide cu 57. (Galaţi, et. locală)
- Să se demonstreze că numărul n= nu este pătrat perfect. (Ialomiţa, et. locală)
- Să se determine numerele naturale a şi b astfel ca: . (Mehedinţi, et. locală)

Soluţii probleme propuse
- Observăm că $U(4^m)$= U=

Pentru n5, U(1·2·3·...·n)=0U(a)=
Pentru n=1U(a)=U(1+4)=5. Pentru n=2U(a)=U(2+6)=8. Pentru n=3U(a)=U(6+4)=0. Pentru n=4U(a)=U(4+6)=0; 2. După efectuarea calculelor rezultă că $x=2\cdot32^{330}$, $y=2\cdot27^{330}$, $z=2\cdot49^{330}$y < x < z; 3. $2^{92} < 2^{93} < <==3^{62}2^{92}<3^{62}$; 4. $U(x^2)U(5\cdot x^2)$,$U(3\cdot y^2)$
$U(5\cdot x^2 + 3\cdot y^2)$, dar $U(8^{2006})$=4, deci egalitatea nu poate avea loc; 5. U()=9, U()= 4U()=3restul împărţirii la 5 este 3; 6. a) După efectuarea calculelor observăm că a=24şi b=35a<b, b) a=24=(165·10+150)·=165·10·+150·, analog b=165·15·+150·a şi b dau acelaşi rest la împărţirea cu 165; 7. Observăm că U()=6, U()=2, U() =1U(A)=9A=10k+9=5(2k+1)+4, deci restul este 4; 8. Observăm că $1+7+7^2=57$ şi cum avem 999 puteri ale lui 7, le grupăm câte trei şi avem:
$a=(7+7^2+7^3)+ (7^4+7^5+7^6)+...+ (7^{997}+7^{998}+7^{999})=7\cdot57+7^4\cdot57+...+7^{997}\cdot57= 57\cdot(7+7^4+...+7^{997})$ deci 57 divide a; 9. $U(n)=U(92^{93})+ U(93^{92})$=2+1=3n nu este pătrat perfect deoarece U(n); 10. $(2^b+1)(6^a+1)=17\cdot37$cazul I: $2^b+1=17$, $6^a+1=37$ cu soluţia a=2 şi b=4, cazul II: $2^b+1=37$, $6^a+1=17$ nu are soluţie.

Fişă de activitate

- Fie numerele şi
 y = .
  a) Arătaţi că $x + y$ este pătrat perfect.
  b) Calculaţi x^y şi y^x. (Argeş, et. locală)
- Să se detremine ultimele două cifre ale numărului (Gazeta matematică, seria B)
- Aflaţi numerele naturale x,y,z care verifică egalitatea . (Argeş, et. judeţeană)
- Să se compare numerele $a=4^{25} + 3^{31}$ şi $8^{16} + 27^{11}$. (Hunedoara, et. locală)
- Determinaţi cifrele x şi y din egalitatea . (Vaslui, et. locală)
- Calculaţi $y-x$ ştiind că x şi y verifică egalitatea: $5^{2x-1} + 2006^{x-1} + y = 2006$. (Argeş, et. locală)
- Arătaţi că numărul $N=2 \cdot 4^n \cdot 2^n \cdot 9^{2n} + 8^n \cdot 16 \cdot 81^n \cdot 9 + 2^{3n+2} \cdot 27^n \cdot 3^n \cdot 243$ este divizibil cu 1118. (Timiş, et. locală)
- Comparaţi numerele 128^{11} şi 65^{13}. (Gazeta matematică, seria B)
- Se dă numărul A = , unde n **N***. a) Arătaţi că $n^2 + n$ este număr par. b) Aflaţi ultima cifră a numărului A. (Constanţa, et. locală)
- Se dau numerele: $x=27^3:9^3+3-(3^3 \cdot 2^5)^6:(3^{17} \cdot 2^{30})$ şi $y=3\cdot(5-2\cdot3-2430:405)$.

a) Calculaţi $x+z$; $x-z$; $x\cdot z$; $x^y : (3^4)^{11}$.
b) Aflaţi ultima cifră a numărului $A=x^{1999} + y^{1999} -1^{1999}$. (Botoşani, et. judeţeană)

- Să se arate că numărul $N=11^3+22^3+...+99^3$ este impar. (Vrancea, et. judeţeană)
- Dacă numerele naturale n, n+1, n+3 sunt prime, atunci este adeevărat că numărul $n^{n+3} + (n+1)^n + (n+3)^{n+1}$ este prim? (Gorj, et. judeţeană)
- Să se arate că nu există numere numerele naturale impare m,n,p astfel încât $2^m+2^n+2^p=2000$. (Hunedoara, et. locală)
- Comparaţi numerele $a=2^{n+1} + 3\cdot2^{n+1} - 9\cdot2^n$ şi $b=2^{n+1} \cdot 5^n - 10^n$, nN. (Olt, et. locală)
- Determinaţi numerele a,n N^* ştiind că a este număr prim şi $a^{2n} - 4=3\cdot(4+4^2+4^3+\ldots+4^{1999})$. (Argeş, et. judeţeană)
- Se dau numerele $A=5^{1990}+5^{1991}+\ldots+5^{1997}$ şi $B=5^0+5^1+5^2+5^3$.

a) Să se arate că B divide A.
b) Să se afle ultimele trei cifre ale numărului A. (Arad, et. judeţeană)

- Se dau numerele $a=3^{63} - 3^{62} - 3^{60}$ şi $b=17^{21}$. Care dintre ele este mai mare? (Gazeta matematică, seria B)
- a) Calculaţi $6^2+19^2+40^2$.

b) Demonstraţi că numărul 1997^{1997} se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte.
c) Scrieţi în trei moduri numărul 1997 ca sumă de puteri ale numărului 2. (Teleorman, et. judeţeană)

- Demostraţi că oricare ar fi nN^*, 1991 divide a, unde $a=3^{4n+4} \cdot 11^{2n} \cdot 125^n + 4 \cdot 5^{3n+2} \cdot 81^n \cdot 121^n$. (Botoşani, et. judeţeană)
- Aflaţi ultimele două cifre ale câtului împărţirii numărului $7^{n+1} + 4\cdot7^n + 17$ la 11, ştiind că n este multiplu de 4. (Gazeta matematică, seria B)
- a) Arătaţi că numerele de forma $a=2^{n+3} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 180\cdot2$ sunt divizibile cu $30^n - 1$, oricare ar fi nN^*.

b) Fie $x=4^n + 9^n$, nN. Arătaţi că x nu este pătrat perfect. (Alba, et. locală)

- Există numere naturale n astfel încât $2^n + 3^n = n^2 + n^3$? (Mehedinţi, et. judeţeană)
- a) Să se compare numerele 2^{497} cu 5^{213}.

b) Arătaţi că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.

c) Câte cifre are numărul $A=2^{320} \cdot 5^{240}$? (Vâlcea, et. locală)

- Arătaţi că , nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numerele naturale m,n cu m>1, n>1.

(Prahova, et. locală)

- Se dau numerele : $a=1 + 2 + 2^2...+ 2^{1966} + 2^{1967}$ şi $b=4(3^{1311} - 3^{1310} + 3^{1309} - 3^{1308} +\ldots+ 3^3 - 3^2 + 3 - 1)$

a) Scrieţi numerele a+1 şi b+1 ca o singură putere. b) Comparaţi numerele a şi b. (Vrancea, et. locală)