VIII. NUMERE PRIME. NUMERE COMPUSE

Se numeşte prim orice număr natural, diferit de 1, care are ca divizori numai pe 1 si pe el însuşi.
Orice număr natural m are divizorii improprii 1 şi m. Orice alt divizor se numeşte divizor propriu.
Putem spune atunci, că se numeşte număr prim orice număr natural, diferit de 1, care admite numai divizori improprii.
Exemple de numere prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47
Există o infinitate de numere prime.
Dacă p este număr prim şi , atunci sau .
Singurul număr prim par este 2. Celelalte numere prime sunt impare.
Exerciţiu: Orice număr prim p5 are forma 6k+1 sau 6k+5.
Rezolvare:Resturile care se pot obţine la împărţirea cu 6, numerele naturale au una din formele:6m ,6m+1, 6m+2, 6m+3, 6m+4, 6m+5 . Cum pentru , avem 6m+2=2·(3m+1), 6m+3=3·(2m+1), 6m+4=2·(3m+2), deci numerele 6m, 6m+2, 6m+3, 6m+4 sunt compuse, rezultă că numerele prime au una din formele 6m+1 sau 6m+5=6m+6−1=6(m+1)−1.
Dacă un număr prim p divide un pătrat perfect n, atunci p^2 îl divide pe n.
Un număr este "perfect" dacă suma S a divizorilor săi (exceptând numărul însuşi) este egală cu numărul dat N. Dacă S > N, atunci numărul este "supraperfect", iar dacă S < N, numărul este "imperfect".
Exemple de numere "perfecte":
6 = 1+2+3;
28 = 1+2+4+7+14;
496= 1+2+4+8+16+31+62+124+248.
Exemple de numere "supraperfecte":
12 < 1+2+3+4+6;
18 < 1+2+3+6+9;
20 < 1+2+4 +5+10.
Exemple de numere "imperfecte":
16 > 1+2+4+8;
22 > 1+2+11.
Orice număr natural care nu este prim se numeşte neprim.
Numerele neprime diferite de 1 se numesc numere compuse.
Orice număr compus se scrie ca un produs de numere prime, nu toate diferite. (Scrierea este unică, dacă nu luăm în calcul ordinea factorilor)
De exemplu numerele naturale 0, 9, 12, 245, 1470 sunt compuse.
Pentru a stabili dacă un număr este prim împărţim numărul pe rând, la toate numerele prime în ordine crescătoare, începând cu 2, până când obţinem un cât mai mic sau egal cu împărţitorul. Dacă numărul se divide cu unul din aceste numere prime, este evident că el nu este prim. Dacă numărul considerat nu se divide cu nici unul din aceste numere prime, atunci el este număr prim.

Probleme rezolvate

- Determinaţi numerele naturale prime a, b, c astfel încât a+ 6b+ 2c= 46.

<u>Rezolvare:</u>
Din 46 divizibil cu 2, 6b divizibil cu 2, 2c divizibil cu 2, rezultă că a este divizibil cu 2, dar a număr prim, deci a=26b+ 2c= 443b+c=22, deci 3b şi c au aceeaşi paritate. Dacă b=2 obţinem 6+c=22, c=16 (nu convine deoarece 16 nu este număr prim). Dacă b=3 obţinem 9+c= 22,

c=13. Dacă b=5 obţinem 15+c= 22, c=7. Dacă b= 7 obţinem 21+c=22, c=1 (nu convine, 1 nu este număr prim). Deci (a,b,c){(2,3,13), (2,5,7)}.

- Să se determine n pentru care toate numerele n, n+4, n+6, n+10, n+12, n+16, n+22 sunt numere prime.

Rezolvare:

Observăm că pentru n=7 obţinem 7, 11, 17, 19, 23, 29, toate numere prime. Trebuie să demonstrăm unicitatea soluţiei. Orice număr natural în raport cu 7 are una din formele 7k, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6, unde k număr natural. Cu excepţia lui 7 niciun alt număr de forma 7k nu este prim. Deci n=7k. Pentru n=7k+1n+6=7k+7, care nu e număr prim. Pentru n=7k+2n+12=7k+14, care nu e număr prim. Pentru n=7k+3n+4=7k+7, care nu e număr prim. Pentru n=7k+4n+10=7k+14, care nu e număr prim. Pentru n=7k+5n+16=7k+21, care nu e număr prim. Pentru n=7k+6n+22=7k+28, care nu e număr prim.

- Arătaţi că numărul y=2·3·5·7·11·13·17·19·23·29·31–169 nu este prim.

Rezolvare:

Observăm că y=2·3·5·7·11·13·17·19·23·29·31–169=13(2·3·5·7·11·17·19·23·29·31–13)=13k , deci nu este număr prim.

- Numerele prime mai mari decât 3 sunt de forma 6k−1 sau 6k+1, kN.

Rezolvare:

Ţinând seama de resturile ce se pot obţine la împărţirea cu 6, numerele au una din formele: 6m, 6m+1, 6m+2, 6m+3, 6m+4, 6m+5, mN. Cum pentru m>0 avem 6m+2=2(3m+1) , 6m+3=3(2m+1), 6m+4=
2(3m+2), deci numerele 6m, 6m+2, 6m+4 sunt compuse rezultă că numerele prime au una din formele 6m+1 sau 6m+5=6m +6 −1=6(m+1) −1.

- Să se arate că numărul x=4^k·25^{k+2} −1este număr compus pentru orice kN. (Mehedinţi, et. locală)

Rezolvare:

Observăm că x=4^k·25^{k+2} −1=25^2·100^k −1, pentru k=0 avem x=624 care este număr compus. Pentru k>0, kN
avem x=624 care şi el este un număr compus.

- Arătaţi că printre numerele , n, există cel puţin unul care nu este prim, oricare ar fi, . (Dâmboviţa, et. locală)

Rezolvare:

Fie n=3k+r, r. Dacă n=3k, atunci n nu este prim fiind divizibil cu 3. Dacă n=3k+1, atunci n+2000=3k+2001=M_3 nu este prim fiind divizibil cu 3. Dacă n=3k+2, atunci n−2000=3k−1998=M_3 nu este prim fiind divizibil cu 3.

- Determinaţi toate perechile de numere prime pentru care numerele şi sunt de asemenea prime. (Alba, et. judeţeană)

Rezolvare:

b>11, b număr primp par sau q par.

Dacă p parp=2a=14+q şi b=2q+11, atunci a) pentru q=3k+1a=14+3k+1=M_3, b) pentru q=3k+2b=2(3k+2)+11= M_3. Deci q=3k, q număr prim k=1 şi q=3.

Dacă p=3k+1a=21k+9=M_3 – număr compus.

Dacă p=3k+2b=6k+15=M_3 – număr compus.

- Pentru definim . Determinaţi numerele prime p cu proprietatea . (Concursul Traian Lalescu, Arad)

Rezolvare:

Fie p=77!+n, unde 2n76n este unul din factorii din produsul 77!n|77!, deci n|p, atunci p nu este număr prim. În concluzie nu există numere prime cu proprietatea din enunţ.

• Determinaţi numerele naturale nenule n, astfel încât există n numere consecutive a căror sumă este un număr prim.

Rezolvare:

Pentru n=1 afirmaţia este evidentă. Pentru n=2 deoarece orice număr prim impar se poate scrie ca sumă a două numere naturale consecutive. Folosim metoda reducerii la absurd şi presupunem că există n3 şi a număr natural nenul astfel încât (a+1)+ (a+2)+ (a+3)+...+ (a+n)=p=prim2p=n(2a+n+1), contradicţie deoarece p este prim iar n şi 2a+n+1 sunt numere naturale cel puţin egale cu 3. Singurele soluţii sunt n=1, n=2.

• Arătaţi că dacă x=ia valoare maximă, atunci este număr prim. (Bistriţa-Năsăud, et. locală)

Rezolvare:

=11(a+b+c)−(100a+10b+c)=−89a. Acest număr este maxim dacă =99, iar a=1=199 care este un număr prim.

• Determinaţi numerele prime a,b,c dacă 5 divide produsul a·b·c şi a+b+c este multiplu al lui 8, cel mai mic posibil.(Bucureşti, et. locală)

Rezolvare:

Fără a restrânge generalitatea presupunem că abc. Din condiţia 8 divide a+b+c obţinem a=2 şi din 5 divide produsul a·b·cb=5, suma a+b+c minimă c=17.

Probleme propuse

• Determinaţi numerele naturale nenule a şi n, ştiind că a este număr prim şi $a^{2n} - 4= 3\cdot(4+4^2+4^3+\ldots+4^{1999})$.
(Argeş, et. judeţeană)

• Să se afle numerele naturale prime de trei cifre care au produsul cifrelor 140. (Bihor, et. judeţeană)

• Determinaţi numerele prime a,b,c astfel încât a+10b+12c=92. (Braşov, et. judeţeană)

• Dacă numerele naturale n, n+1, n+3 sunt prime, atunci este adevărat că numărul $n^{n+1}+(n+1)^n+(n+3)^{n+1}$ este prim? (Gorj, et. judeţeană)

• Fie p,k numere naturale nenule şi p prim. Dacă $1997\cdot p^k - 4$ şi $1997\cdot p^k + 4$ sunt simultan prime, detreminaţi p. (Galaţi, et. judeţeană)

• Fie numerele prime a,b,c.

a) Determinaţi a,b,c ştiind că 3a+4b+10c=136.

b) Pentru a,b,c calculate la punctual a) arătaţi că numărul $a^{1997}+6b+c$ nu poate fi pătrat perfect. (Ialomiţa, et. judeţeană)

• Determinaţi numerele naturale a şi b ştiind că b este număr prim şi $a+b+a^2=74$. (Dolj, et. judeţeană)

Să se demonstreze că dacă n−1şi n+1 sunt numere prime, n>6, atunci 6 divide n. (Iaşi, et. judeţeană)

• Aflaţi numerele prime de forma , ştiind că a·=c·+10. (Gazeta matematică, seria B)

• Determinaţi numerele naturale n, p ştiind că p este prim şi are loc relaţia $p+n^2+n=134$. (Timiş, et. judeţeană)

• Să se determine numerele naturale astfel încât suma pătratelor cifrelor sale să fie pătratul unui număr prim de forma 3k+2, unde k număr natural. (Baia Mare, et. naţională)

• Să se determine numerele naturale prime a, b, c ştiind că a+b+c=2000 şi b − c=44. (Brăila, et. locală)

Soluţii probleme propuse

1. Notăm $x=4+4^2+4^3+\ldots+4^{1999}$ $a^{2n} - 4= 4x - x$ $a^{2n}=2^{4000}$a=2 nr. prim şi n=2000; 2. ; 3. Din analiza parităţii a=2, după efectuarea calculelor b=3, c=5; 4. n, n+1 numere consecutive prime din care unul este par. Deoarece singurul număr prim par este 2, rezultă că n=2.

n^{n+1}+$(n+1)^n$+$(n+3)^{n+1}$ este număr par, deci nu poate fi număr prim; 5. Între numerele 1997·p^k − 4 şi 1997·p^k + 4 inclusiv se află 9 numere. Dacă 1997·p^k − 4 este prim 1997·p^k − 4, 1997·p^k + 2, 1997·p^k − 1 nu sunt divizibile cu 3. Dacă 1997·p^k + 4 este prim1997·p^k − 2, 1997·p^k + 4, 1997·p^k + 1 nu sunt divizibile cu 3, deci 3|1997·p^k3| p^k,
P=3; 6. a) Din analiza parităţii a=2, după efectuarea calculelor b=5, c=11, b) 2^{1997}+41 nu poate fi p[trat perfect; 7. Dacă p prim, p5, atunci p=6k+1 sau p=6k − 1, kN. Dacă n − 1=6k+1, atunci n+1=6k+3 care nu e număr prim. Rezultă n−1=6k−1 şi n=6k6 divide n; 8. Egalitatea din enunţ se transformă în b(a− c)=1
de unde =211**;** 9. Deoarece n, n+1 sunt numere consecutive prime rezultă că unul dintre ele este par. Deoarece singurul număr prim par este 2 avem p=2, n=11; 10. a,b,c cifrea^2+b^2+$c^2$3·81 a^2+b^2+c^2=$(3k+2)^2$3k+215k, dar 3k+2 număr prim, k. Problema are ca soluţie 15 numere de trei cifre; 11. b=44+c a+44+2c=2000a=2 singurul număr prim par, b=1021, c=977.

Fişă de activitate

- Aflaţi numărul natural n, ştiind că n+5, n+9, n+11, n+21, n+29 sunt simultan numere prime.
- Suma dintre un număr prim şi un număr impar este 371. Aflaţi numerele.
- Aflaţi dacă există a,b,c,d numere prime astfel încât 3a+5(3b+7c)=330 – 45d.
- Determinaţi toate numerele naturale divizibile cu 10 şi care au 4 divizori. (Gazeta matematică, seria B)
- Fie numărul natural A=2008·n, unde nN. Să se găseasca cel mai mic număr natural impar n, pentru care A are exact 2008 divizori (Concursul Eugen Ionescu, Slatina)
- Fie numărul $A=3^x\cdot5^y\cdot7^z$ unde x,y,z sunt numere naturale nenule. Determinaţi numărul A ştiind că 27·A are cu 36 divizori mai mulţi decât A, iar 49·A are cu 12 divizori mai mulţi decât A.
- În câte moduri distincte se poate descompune numărul 17640 într-un produs de doi factori primi între ei? Generalizare: În câte moduri distincte se poate descompune un număr natural n într-un produs de doi factori primi între ei?
- Să se determine numerele prime care se pot reprezenta atât ca sumă cât şi ca diferenţă de două numere prime.
- Demonstraţi următoarele afmaţii:

a) Dacă un număr prim este de forma 2n + 1, atunci n = 0 sau n = 2k, kN.
b) Dacă un număr prim este de forma 2n − 1, atunci n este număr prim.

- Fie p un număr prim şi n număr natural. Câte numere naturale prime cu p^n şi mai mici decât p^n există?
- Dacă a şi b sunt numere naturale astfel încât a + b este număr prim, atunci (a; b) = 1.
- Să se determine numerele prime ştiind că suma lor este pătratul unui număr natural, iar a b c (Hunedoara, et. judeţeană)
- Să se arate că numărul de două cifre este prim dacă şi numai dacă numărul 2a − b este prim.

- Să se determine numerele naturale n astfel încât n + 1, n + 5, n + 7, n + 11, n + 13, n + 17 şi n + 23 să fie simultan prime.
- Să se determine numerele prime p astfel încât numerele p; $2p^2-3$; $2p^2+3$ sunt simultan prime. Numerele p; $2p^4-3$; $2p^4+3$ nu pot fi simultan prime.
- Să se determine numerele naturale care nu pot fi scrise ca suma a două numere compuse.
- Orice număr prim impar este diferenţa pătratelor a două numere naturale şi aceasta în mod unic.
- Dacă numărul natural n admite două descompuneri diferite în suma a două pătrate, adică $n=a^2+b^2=c^2+d^2$ atunci el este compus.
- Determinaţi numerele naturale n şi p ştiind că p este număr prim şi are loc relaţia $p+n+n^2=134$. (Timiş, et. judeţeană)
- Să se determine numerele n, p naturale, nenule, astfel încât n, $n+2^p$, $n+2^{p+1}$, $n+2^{p+2}$ să fie simultan numere prime. (Gazeta matematică, seria B)
- Determinaţi numerele de patru cifre a căror descompunere în factori primi este $x^x \cdot y^y \cdot$. (Dolj, et. locală)
- Fie p şi q două numere naturale prime consecutive, cu 2 < p < q. Arătaţi că (p+q):2 este număr natural, nu este prim şi se poate scrie ca sumă de cel puţin două numere naturale prime nu neapărat distincte. (Dolj, et. judeţeană)
- Să se determine numerele naturale prime a,b,c astfel încât (Gorj, et. locală)
- Determinaţi toate numerele de forma cu a,b numere prime, astfel încât să fie un număr par. (Braşov, et. locală)
- Fie numerele prime x, y şi z cu proprietatea că x + 2y + 6z = 38.

a) Să se afle numerele x, y, z.

b) Să se afle numerele naturale a, b, c ştiind că .(Harghita, et. locală)

- Suma a trei numere prime de câte două cifre în baza 10 este un pătrat perfect. Determinaţi termenii sumei ştiind că unul din termeni are cifrele egale iar ceilalţi doi au proprietatea că unul este răsturnatul celuilalt. (Botoşani, et. judeţeană)