VII. DIVIZIBILITATE

Fie a şi b două numere naturale. Dacă a este divizibil cu b şi b este divizibil cu a atunci a = b.
Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă b se divide cu a iar c se divide cu b atunci c se divide cu a.
Dacă un număr natural se divide cu un număr natural, atunci primul se divide cu toti divizorii celui de-al doilea.
Dacă fiecare termen al unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, atunci şi suma lor se divide cu acel număr natural.
Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m şi dacă un număr natural b se divide cu acelaşi număr natural m, atunci şi suma lor a + b se divide cu m sau dacă m|a şi m|b, atunci m|(a + b) oricare ar fi a, b numere naturale.
Dacă unul din termenii unei sume de două numere naturale se divide cu un număr natural, iar celălalt termen nu se divide cu acel număr natural, atunci suma nu se divide cu acel număr natural.
Fie numerele naturale a şi b. Dacă numărul a se divide cu numărul natural m şi dacă b nu se divide cu m atunci suma lor a + b nu se divide cu m sau dacă m|a şi m|b, atunci m|(a + b) oricare ar fi a, b, m numere naturale.
Fie a, b şi m numerele naturale, a >b. Dacă a se divide cu m şi b se divide cu m atunci şi ab se divide cu m sau dacă m|a şi m|b, atunci m|ab oricare ar fi a, b, mN, a > b.
Dacă un număr natural a se divide cu un număr natural m, atunci produsul lui a cu orice număr natural se divide cu m, sau dacă m|a, atunci m|ab, oricare ar fi a, b, mN.
***Definiţie:** Un număr natural d se numeşte divizor comun pentru două numere naturale a şi b, dacă d|a şi d|b.*
***Definiţie:** Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c) a două sau mai multor numere naturale, nu toate nule, este cel mai mare număr natural care divide fiecare din numerele date.*
Cel mai mare divizor comun a două sau mai multor numere naturale se obţine prin înmulţirea tuturor factorilor primi comuni (ce apar în descompunerea canonică a numerelor date), luaţi o singură dată, cu exponenetul cel mai mic.
***Definiţie:** Un număr natural m se numeşte multiplu comun pentru două numere naturale a şi b dacă a/m şi b/m*
***Definiţie:** Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c) a două sau mai multor numere naturale nenule este cel mai mic număr natural care se divide cu fiecare din numerele date.*
Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c) a două sau mai multor numere naturale se obţine prin înmulţirea tuturor factorilor primi comuni şi necomuni (ce apar în descompunerea canonică a numerelor date) o singură dată, cu exponenntul cel mai mare.
Dacă a şi b sunt numere naturale, atunci avem: $[a,b]\cdot(a, b) = a\cdot b$

Criteriul de divizibilitate cu 4 sau 25
Un număr se divide cu 4 sau 25 dacă numărul format din ultimele 2 cifre se divide cu 4 sau 25.

Criteriul de divizibilitate cu 8 sau 125
Un număr se divide cu 8 sau 125 dacă numărul format din ultimele 3 cifre se împarte exact la 8 sau 125.

Criteriul de divizibilitate cu 7, 11, 13*. Numărul natural se divide cu 7, 11 sau 13 dacă şi numai dacă se divide prin 7, 11, 13.*

Probleme rezolvate

- Să se determine x pentru care numărul a=5^{x+2} + 3·7^{2x+3} + 3^3·5^x + 3^2·7^{2x+1} + este divizibil cu 13. (Galaţi, et. locală)

Rezolvare:

5^{x+2} + 3^3·5^x=5^x(5^2+3^3)=5^x·52 13|5^{x+2}+3^3·5^x pentru orice x N. 3·7^{2x+3}+3^2·7^{2x+1}=3·7^{2x+1}(7^2+3) 13|3·7^{2x+3}+3^2·7^{2x+1} pentru orice xN. = 7509+10x=577·13+8+10x, deci 13| numai dacă 13|10x+8x=7.

- Fie a,b şi c trei cifre nenule. Arătaţi că numărul este divizibil cu 37.

Rezolvare:

=100a+10b+c+100b+10c+a+100c+10a+b=111(a+b+c)=37·3(a+b+c)=M_{37}.

- a) Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor A=1·2·3·4·…·128 şi B=4^{64}·20^{15}.

b) Să se arate că numărul (2009^{2009}−5)·(2009^{2009} − 4)·(2009^{2009} − 3) se divide cu 60. (Ialomiţa, et. locală)

Rezolvare:

a) Exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui A este 64+32+16+8+4+2+1=127 iar exponentul lui 5 este 25+5+1=31, B=2^{128} ·5^{30}(A , B)= 2^{127} ·5^{30}, b) avem U(2009^{2009})= U(9^{2009})=9
U(2009^{2009} − 4)=5 astfel că numărul dat se divide cu 5. În plus diferenţele 2009^{2009} − 5 şi 2009^{2009} − 3 sunt numere pare, prin urmare numărul se divide cu 2x2=4, dar 2009^{2009} − 5 se divide cu 3.

- Determinaţi nN, n2, astfel încât n^{2007}+2 să se dividă cu n−1. (Gazeta matematică, seria B)

Rezolvare:

Numărul dat se mai scrie n^{2007}+2=$[(n−1)+1]^{2007}$+2=(n−1)·x+1+2=(n−1)·x +3, xN şi se divide cu n−1, rezultă că 3 este divizibil cu n−1, deci n.

- Fie numărul.

a) Să se arate că A se divide cu 400.

b) Care este ultima cifră diferită de zero a numărului A?(Botoşani, et. judeţeană)

Rezolvare:

a) Observăm că , , , , iar . Deci grupăm termenii numărului A câte 4,
, deci A se divide cu 400.
b) Putem scrie: unde
=2, prin urmare, ultima cifră diferită de zero a numărului A este 2.

- Fie . Să se arate că n este divizibil cu 71. (Bucureşti, etapa judeţeană)

Rezolvare:

=$(71+5)^{63}$+$(71− 5)^{53}$=M_{71}+5^{63}+M_{71} − 5^{53}= M_{71}+5^{53}(5^{10} − 1)= M_{71}+5^{53}(3125^2 − 1)= M_{71}+5^{53}·[$(44·71+1)^2$ −1]= M_{71}+5^{53}·(M_{71}+1 −1)=M_{71}.

- Care este cel mai mare divizor posibil de două cifre al numărului . (Harghita, etapa judeţeană)

Rezolvare:

Observăm că . Dar a şi b cifre că cel mai mare divizor de două cifre al lui n este , obţinut dacă suma este pară.

- Arătaţi că numărul se divide cu 819, pentru orice n număr natural nenul. (Ialomiţa, et. locală)

Rezolvare:

Descompunem 819 în 7·9·13.

$=(7\cdot9)^n + 7^n\cdot7\cdot3^{2n}\cdot3-(3\cdot7)^n\cdot3^n\cdot9=(7\cdot3^2)^n + 21\cdot7^n\cdot3^{2n} - 3^n\cdot7^n\cdot3^n\cdot9=7^n\cdot3^{2n} + 21\cdot7^n\cdot3^{2n} - 7^n\cdot3^{2n}\cdot9=7^n\cdot3^{2n}(1+21-9)= 7^n\cdot9^n\cdot13$A divizibil cu 7, 9,13 deci divizibil cu 819.

- Fie numărul natural , . Determinaţi numărul A ştiind că are cu 36 divizori mai mulţi decât A, iar are cu 12 divizori mai mulţi decât A. (Gazeta matematică, seria B)

<u>Rezolvare:</u>

Numărul de divizori ai lui este egal cu numărul divizorilor lui este egal cu şi numărul divizorilor luieste atunci punând condiţiile din enunţ, obţinem . Cum şi , din cea de-a doua relaţie rezultă , deci . Soluţiile sunt: sau , deci sau .

- Arătaţi că numărul este divizibil cu 10. (Constanţa, et. locală)

<u>Rezolvare:</u>

. Dacă , atunci , deci . Dacă , atunci notând , avem , deci . Dar A este un număr par (fiind suma a 1000 de numere de aceeaşi paritate). Deci şi în acest caz avem .

- Aflaţi numerele naturale a şi b ştiind că [a,b] este de 15 ori mai mare decât (a,b) şi 5a+3b=150. (Gazeta matematică, seria B)

<u>Rezolvare:</u>

Fie d=(a,b)a=da_1, b=db_1, unde a_1 şi b_1 sunt prime între ele. Cum [a,b]=da_1b_1 da_1b_1=15d a_1b_1=15. Sunt patru cazuri posibile: 1) a_1=1, b_1=15a=3, b=45; 2) a_1=3, b_1=5a=15, b=25; 3) a_1=5, b_1=3 nu convine; a_1=15, b_1=1 nu convine.

Probleme propuse

- Arătaţi că numărul este divizibil cu 5. (Bucureşti, et. locală)
- Fie A

a) Aflaţi câţi multipli de 3 conţine mulţimea A.

b) Fie B mulţimea elementelor din A care sunt multipli de 3 sau multipli de 5. Câte elemente conţine mulţimea B?

c) Aflaţi suma elementelor mulţimii B. (Iaşi, et. judeţeană)

- Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât 4a–5b=9c. Demonstraţi că a+b se divide cu 9 şi b+c se divide cu 4. (Gazeta matematică, seria B)
- Fie n număr natural impar.

a) Să se arate că este divizibil cu 24.

b) Dacă , , ..., sunt numere naturale care împărţite la *n* dau câturi distincte şi resturi distincte, arătaţi că valoarea minimă a sumei este divizibilă cu 12.(Mehedinţi, et. judeţeană)

- Fie numărul $n=2+2^2+2^3+\ldots+2^{2012}$

a) Arătaţi că n nu este multiplu al lui 2012.

b) Calculaţi restul împărţirii lui n la 31. (Cluj, et. locală)

- a) Determinaţi numerele prime a, b, c, ştiind că .

b) Să se arate că dacă suma a două numere naturale nenule este un număr prim, atunci cele două numere sunt prime între ele. (Sălaj, et. judeţeană)

- Considerăm patru numere prime distincte a,b,c,d mai mari decât 3, cu suma divizibilă cu 6. Demonstraţi că numărul: A=(a–b)(a–c)(a–d)(b–c)(b–d)(c–d) se divide cu 576. (Gazeta matematică, seria B)
- Un elev a rupt la întâmplare 7 foi dintr-o carte, a adunat numerele tuturor paginilor rupte şi a spus că rezultatul obţinut se divide cu 10. Este adevărat ? Justificaţi răspunsul. (Bucureşti, et. locală)
- Să se determine numerele naturale de forma diviyibile cu 4 astfel încât $a^3=c^2$. (Gazeta matematică, seria B)
- Fie numerele $a=3^{41}\cdot3^{42}\cdot3^{43}\cdot\ldots\cdot3^{90}$ şi $b=1+3+3^2+\ldots+3^{3273}$. Arătaţi că $(a-6b)|(2b+1)$. (Cluj, et. locală)

• Determinaţi numerele naturale n2 care să se descompună în factori primi de forma $(a+b)^c(b+c)^a(c+a)^b$, unde a,b,c sunt numere natural nenule, iar a+b, b+c, c+a nu sunt neapărat diferite. (Gazeta matematică, seria B)

Soluţii probleme propuse

1. Observăm că $1+2^2=5$, grupăm termenii sumei câte doi şi dăm factor comun convenabil astfel încât $n=(1+2^2)+2^3(1+2^2)+2^4(1+2^2)+...+2^{96}(1+2^2)=5(1+2^3+2^4+...2^{96})$, deci n divizibil cu 5; 2. a) $3=3\cdot1$, $6=3\cdot2$,…, $2007=3\cdot669$. Numărul multiplilor de 3 este 669. b) 669 multipli de 3, 401 multiplui de 5, 133 multipli de 15. Card(B) este c) S; 3. Relaţia din enunţ se mai scrie 4a=9c+5b şi dacă adunăm 4b, obţinem 4a+4b=9c+9b, de unde 4(a+b)=9(c+d), cum 4 şi 9 sunt prime între ele rezultă concluzia; 4. a) Într-un produs de trei numere naturale consecutive, exact un factor este multiplu de 3, deci se divide cu 3. Dacă *n* este impar, , avem:. Cum în produsul a două numere naturale consecutive exact unul din factori este par, produsul se divide cu 2, deci este multiplu de 8. Prin urmare, este divizibil cu ; 5. a) n este un număr de forma 4k+2, deci nu se divide cu 4, iar $2012=4\cdot503$, rezultă că n nu se divide cu 2012; b) $n=2+2^2+2^3(1+2+2^2+2^3+2^4)+\ldots+2^{2008}(1+2+2^2+2^3+2^4)=M_{31}+6$, deci restul c[utat este 6; 6. a) Dacă a, b, c sunt pare şi prime (F); Dacă a, b, c sunt impare şi prime impar. Trebuie ca două din numere să fie prime pare şi al treilea prim impar , număr prim. Soluţiile sunt: ; ; ;b), p număr prim şi impar a număr par şi b număr impar (sau invers). Fie , şi cum p este număr prim, deducem sau . Cazul este imposibil. Rezultă şi deci numerele a şi b sunt prime între ele; 7. $576=64\cdot9$, unde (64,9) a,b,c,d au una din formele 3k+1 sau 3k+2, a,b,c,d pot fi $3k_1+1$, $3k_2+1$, $3k_3+2$, $3k_4+2$. două din paranteze vor fi divizibile cu 3, deci 9│A, a,b,c,d-impare implică fiecare paranteză – pară, 64│A; 8. Suma numerelor de pe o foaie este impar (fiind suma a două numere consecutive). Suma a 7 numere impare va fi un număr impar, deci nu se poate divide cu 10; 9. $a^3=c^2a=x^2$, $c=y^3$, a şi b cifre a=4, c=84|; 10. şi ; 11. Observăm că dintre numerele a,b,c două au aceeaşi paritate, deci cel puţin unul dintre numerele a+b, b+c, c+a este par. Presupunem că a+b este par, dar a+b prima+b=2
$a=b=1n=2^{p-1}\cdot p^2$

Fişă de activitate

• Fie numerele a=5n+3 si b=8n+5 , nN. Arătaţi că $[a,b]=a\cdot b$, oricare ar fi nN.
Arătaţi că dacă (2a +5b)=M13 atunci (3a +b)=M13.

• Să se găsească numerele naturale a şi b în fiecare din situaţiile:
a) (a,b)=18 şi a+b=180
b) (a,b)=8 şi $a\cdot b=1344$, unde (a,b) reprezintă c.m.m.d.c al numerelor a şi b.

• Fie n un număr natural nenul oarecare de forma n= , unde c este ultima cifră a numărului n şi c. Să se demonstreze că există un număr natural care se divide cu n şi care se scrie folosind numai cifra c. (Galaţi, et. locală)

• Fie a, b, c numere naturale nenule astfel încât 4a–5b=9c. Demonstraţi că a+b se divide cu 9 şi b+c se divide cu 4. (Gazeta matematică, seria B)

• Dacă a,b,c sunt numere naturale nenule şi $7a-11b=84c$ arătaţi că $77|b\cdot(a-c)$. (Rm. Vâlcea, et. locală)

• Dacă $x_1,x_2,x_3,....x_{500}$ sunt numere naturale nedivizibile cu 5, arătaţi că numărul $N=2x_1^4+4x_2^4+6x_3^4+\ldots+1000x_{500}^4$ se divide cu 5. (Bucureşti, et. locală)

- Ştiind că suma se divide cu 18 şi că , să se determine valorile pe care le poate lua S. (Bihor, et. locală)
- Fie a, b,c trei numere naturale diferite între ele . Demonstraţi că dacă: şi (a,b)=(a,c)=(b,c), atunci este pătrat perfect. (Braşov, et. locală)
- Fie T un număr natural cu următoarele trei proprietăţi:

a) T are 2006 cifre;
b) prima cifră a lui T este 3;
c) numărul format din orice două cifre consecutive ale lui T este divizibil cu 17 sau cu 23.
Aflaţi valorile pe care le poate lua ultima cifră a numărului T. (Constanţa, et. judeţeană)

- Determinaţi cifrele x,y,z astfel încât numărul , scris în baza 10, să fie divizibil cu 1980. (Dolj, et. judeţeană)
- a) Să se arate că numerele 14 şi 15 au aceeaşi sumă a divizorilor.

b) Să se arate că există o infinitate de perechi de numere naturale având aceeaşi sumă a divizorilor.
c) Să se arate că există o infinitate de triplete de numere naturale având aceeaşi sumă a divizorilor. (Gazeta matematică, seria B)

- Să se arate că numărul se divide cu 60. (Neamţ, et. judeţeană)
- Arătaţi că numărul este divizibil cu 10. (Constanţa, et. locală)
- Fie mulţimea A=. Arătaţi că:

a) Oricare ar fi 5 elemente din mulţimea A există 2 a căror diferenţă este divizibilă cu 5
b) Oricare ar fi trei elemente din mulţimea A există 2 a căror sumă sau diferenţă este divizibilă cu 5
c) Suma oricăror trei elemente din mulţimea A cu exponenţii numere pare consecutive este divizibilă cu 7. (Brăila, et. locală)

- Fie astfel încât . Să se arate că 21 divide . (Buzău, et. locală)
- Să se determine numerele , scrise în baza 10, divizibile cu 12 ştiind că se divide cu 51. (Argeş, et. locală)
- Fie n un număr natural nenul. Notăm cu S(n) suma divizorilor lui n. Arătaţi că dacă S(n)=S(2n), atunci n se divide cu 9. (Dolj, et. locală)
- Fie numărul a=333......33, având cifra 3 de n ori, n număr natural nenul. Demonstraţi că dacă numărul a se divide prin 13, atunci el se divide şi prin 37. (Dâmboviţa, et. judeţeană)
- Demonstraţi că există un multiplu al numărului 2003 care să fie scris numai cu cifre de 0 şi 1. (Prahova, et. locală)