PROBLEME REZOLVATE DIN REVISTA „AXIOMA”

Gheorghe Crăciun

CLASA a V-a

1. Fie a şi b două numere naturale nenule. Ştiind că:

$\frac{2}{3} < \frac{3}{a} < \frac{7}{5} < \frac{3}{b} < \frac{6a}{2a+3b}$ **, calculaţi a + b.**

Nicolae Angelescu, Ploiesti

Soluţie:

a, b $\in$ **N***; $\frac{2}{3} < \frac{3}{a} < \frac{7}{5} < \frac{3}{b} < \frac{6a}{2a+3b}$; $\frac{10}{15} < \frac{45}{15a} < \frac{21}{15}$;

$10 < \frac{45}{a} < 21 \Rightarrow a \in \{3,4\}$. $\frac{7}{5} < \frac{3}{b}$; $7b < 15 \Rightarrow b \in \{1, 2\}$.

Din cele patru cazuri, convine doar a = 4 şi b = 2, deci a + b = 6.

2. Să se determine numerele naturale a şi b ştiind că $152^{2014} = a^3 + b^3$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Avem succesiv

$152^{2014} = 152^{2013} \cdot 152 = (152^{671})^3 \cdot (27 + 125) = (152^{671})\cdot (3^2 + 5^3) = (3\cdot 152^{671})^3 + (5\cdot 152^{671})^3$, de unde $a = 3\cdot 152^{671}$ iar $b = 5\cdot 152^{671}$.

3. Să se calculeze produsul numerelor natural a, b, c ştiind că sunt verificate simultan condiţiile a + b = 64, a· c = 671 iar b· c = 33.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:

Adunând ultimele două relaţii se obţine:

a· c + b· c = 704, de unde

(a + b)· c = 704, şi înlocuind a + b = 64, vom obţine

64· c = 704, de unde c = 11.

Înlocuind c = 11 vom găsi a = 61 iar b = 3, de unde a· b· c = 61· 3· 11 = 2013.

4. Aratati ca daca a,b,c sunt cifre ale sistemului de numeratie in baza zece si $37 \mid \overline{abc}$ **atunci** $37 \mid \overline{bca}$.

Gh. Craciun,Ploiesti

Soluţie

Fie A= $\overline{abc} = 100a + \overline{bc}$ si B= $\overline{bca} = 10\overline{bc} + a$. Observam ca 10A-B=999a= $37 \cdot 3^3 \cdot a$ si cum $37 \mid \overline{abc}$ rezulta $37 \mid B$.

5. Determinaţi cel mai mare număr raţional mai mic decât 1, de forma: $a = \frac{162 + \overline{4xy}}{\overline{5yx}}$ **.**

Petre Năchilă, Ploiesti

Soluţie:

$a=\frac{562+\overline{xy}}{500+\overline{yx}}$. Ne ocupăm de numărul $b=\frac{62+\overline{xy}}{\overline{yx}}=\frac{62+9x+y}{9y+x+y}$ sau de numărul $c=\frac{62+9x}{9y}$.

Pentru a avea c < 1 şi să fie cel mai mare avem situaţiile: y = 9 şi x∈{0, 1, 2} sau y = 8 şi x∈{0, 1} sau y = 7 şi x = 0. Numărul a este cel mai mare când $\overline{xy}$ este cel mai mare şi $\overline{yx}$ cel mai mic, deci:

$\overline{xy}\in\{29, 19, 18, 09, 08, 07\}$ şi $\overline{yx}\in\{70, 80, 90, 91, 92\}$.

1^0 $\overline{xy}=29$; $a=\frac{162+429}{592}=\frac{591}{592}=1-\frac{1}{592}$

2^0 $\overline{xy}=19$; $a=\frac{162+419}{591}=\frac{581}{591}=1-\frac{10}{591}$, etc.

Din cele şase cazuri, scăzătorul $\frac{1}{592}$ fiind cel mai mic, $a=\frac{591}{592}$ este cel mai mare.

CLASA a VI-a

1.Aratati ca daca *a,b,c,d,e,f* sunt cifre ale sistemului de numeratie in baza zece si $37\,|\,\overline{abcdef}$ atunci numarul $\overline{111bcdefa}$ nu este numar prim.

Craciun Gh. ,Ploiesti

Soluţie:

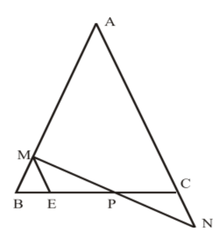
Evident $37\,|\,111$. Vom arata ca $37\,|\,\overline{bcdefa}$ si atunci $\overline{111bcdefa}=37\cdot 3\cdot 10^6+37\cdot k$ deci admite ca divizor pe 37 si deci nu este prim.

Fie A= $\overline{abcdef}=a\cdot 100000+\overline{bcdef}$ si B= $\overline{bcdefa}=10\cdot\overline{bcdef}+a$ .Observam ca 10A-B=999 999$\cdot a=37\cdot 27027\cdot a$ si cum $37\,|\,\overline{abcdef}$ deducem ca 37 divide B.

2.Pe latura AB a triunghiului ABC se consider punctual M iar pe semidreapta (AC se ia punctual N astfel încât C ∈ (AN) şi [CN] ≡ [BM]. Dacă {P} = MN ∩ BC şi P este mijlocul segmentului MN, să se demonstreze că [AB] ≡ [AC].

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

Soluţie:



Fie ME || AC, E ∈ (BC). ΔPEM ≡ Δ PCN (∢MPE ≡ ∢ NPC (op.vf.), [PM] ≡ [PN], ∢PME ≡ ∢ PNC (alt. int.) de unde rezultă că [ME] ≡ [CN] şi cum [CN] ≡ [BM] se obţine că [BM] ≡ [ME], prin urmare triunghiul MBE este isoscel cu ∢MBE ≡ ∢ MEB.
Dar ∢ MEB ≡ ∢ ACB (corespondente) şi prin urmare vom avea ∢ABC ≡ ∢ ACB ceea ce demonstrează că triunghiul ABC este isoscel cu [AB] ≡ [AC].

3. Fie n număr natural nenul şi

$A = \{x \in N \mid x$ multiplu de 3 şi $n < x < 3n\}$.

a) Pentru n = 670 să se determine numărul de elemente ale mulţimii A.
b) Să se determine n pentru care A conţine 100 de elemente.

Nicolae Angelescu

Soluţie:

a) $A = \{672, 672+3\cdot1, 672+3\cdot2, ..., 672+3\cdot445\}$; $\mathrm{card}A = 446$.

b) $3n - n = 300$, $n = 150$; $150 < x < 450$.

$A = \{153, 153+3\cdot1, 153+3\cdot2, ..., 153+3\cdot98\}$ are 99 de termeni; nu convine.

$n = 151$; $151 < x < 453$; $A = \{153, 153+3\cdot1, 153+3\cdot2, ..., 153+3\cdot99\}$ are 100 de termeni, deci $n = 151$.

4. Să se arate că numărul $a = 49^n \cdot 3^{n+1} \cdot 34 + 7^{2n+1} \cdot 3^{n+1} + 7^{2n} \cdot 3^n \cdot 20$ este divizibil cu 3003 oricare ar fi numărul natural nenul n.

Adelina Apostol, Ploieşti

Soluţie:

$a = 7^{2n} \cdot 3^n \cdot (3\cdot34 + 7\cdot3 + 20) = 7^{2n} \cdot 3^n \cdot 11 \cdot 13$; $3003 = 3\cdot7\cdot11\cdot13$. Deci *a* se divide cu 3003.

5. a) Scrieţi numerele 14 şi 14^2 ca sumă de trei pătrate perfecte.
b) Arătaţi că orice putere naturală a lui 14 se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte.

I. Lupea şi I. Tomescu

Soluţie:

a) $14 = 1^2 + 2^2 + 3^3$; $14^2 = 4^2 + 6^2 + 12^2$. b) $14^0 = 0 + 0 + 1$.

$14^{2k+1} = 14^{2k} \cdot 14 = 14^{2k} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = (14^k)^2 + (14^k \cdot 2)^2 + (14^k \cdot 3)^2$.

$14^{2k+1} = 14^{2k} \cdot 14^2 = 14^{2k} \cdot (4^2 + 6^2 + 12^2) = (14^k \cdot 4)^2 + (14^k \cdot 6)^2 + (14^k \cdot 12)^2$

CLASA a VII-a

1.Se considera A un numar de 4030 cifre dintre care 2015 sunt cifre de 3 iar restul de 7 .Sa se arate ca $\sqrt{A} \notin N$.

Craciun Gh. ,Ploiesti

Soluţie:

Observam ca suma cifrelor lui A este egala cu 20150 si ca restul impartirii acestui numar la trei este 2. Dacă n=3p, $p \in N \Rightarrow n^2=3k$, $k \in N$;
Dacă n=3p+1, $p \in N \Rightarrow n^2=(3p+1)^2=3^2p^2+2\cdot3p+1=3k+1$, $k \in N$;
Dacă n=3p+2, $p \in N \Rightarrow n^2=(3p+2)^2=3^2p^2+2\cdot3p\cdot2+2^2=3k+1$, k Patratele perfecte sunt de fo

2.Determinaţi numerele prime p şi q care verifică : $\frac{2\cdot p^8+1}{p^4+3} = q^3$.

Ionel Tudor, Călugăreni , Giurgiu, Viorica Dogaru , Giurgiu

Soluţie:

Dacă p este număr prim impar , atunci p^4 *este impar şi* p^4+3 este număr par.Cum $2p^8+1$ este număr impar , rezultă $\frac{2p^8+1}{p^4+3}\notin N$, iar ecuaţia nu se verifică.

Dacă p= 2 , care este singurul număr prim par , avem $\frac{2\cdot 2^8+1}{2^4+3}=\frac{2^9+1}{16+3}=\frac{512+1}{19}=\frac{513}{19}=27=3^3$.

Rezultă că soluţiile în numere prime ale ecuaţiei date sunt p=2 şi q=3.

3. Determinaţi mulţimea:

$A=\left\{\overline{xyz}\mid \frac{\overline{xy}}{5}=\frac{\overline{yz}}{8}=\frac{\overline{zx}}{9} \text{ şi 7 divide } x+y+z\right\}$ **unde** $\overline{xyz}$ **este un număr natural scris în baza 10.**

Petre Năchilă

Soluţie:

$\frac{\overline{xy}}{5}=\frac{\overline{yz}}{8}=\frac{\overline{zx}}{9}=\frac{11(x+y+z)}{22}=\frac{x+y+z}{2}=\frac{7k}{2};k\in N^*$.

$\overline{xy}=\frac{35k}{2}\in N\Rightarrow k\in\{2,4\};\ \overline{yz}=28k\Rightarrow k\in\{1,2,3\};\ \overline{zx}=\frac{63k}{2}\Rightarrow k=2$. Deci k = 2.

$\overline{xy}=35;\overline{yz}=56;\overline{zx}=63\Rightarrow\overline{xyz}=356$.

4. a) Calculaţi: $1{,}5\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt7}-\frac{1}{\sqrt{63}}\right)\cdot\left[\left(\sqrt{11}-\sqrt7\right)^{-1}-\frac{\sqrt{11}}{4}\right]$

b) Găsiţi un număr real x, care verifică condiţiile: 1 < x < 2 şi $x\cdot\frac{1}{4\sqrt{11}}\in Q$ **.**

Nicolae Angelescu

Soluţie:

. a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{11}}{11}\cdot\frac{2}{3\sqrt7}\cdot\left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt7}{4}-\frac{\sqrt{11}}{4}\right)=\frac{\sqrt{11}}{11\sqrt7}\cdot\frac{\sqrt7}{4}=\frac{\sqrt{11}}{44}$.

b) $x\cdot\frac{1}{4\sqrt{11}}\in Q\Rightarrow x=k\sqrt{11},k\in Q;k\sqrt{11}\in(1,2)$.

De exemplu $k=\frac13;\ x=\frac{\sqrt{11}}{3}$. Într-adevăr: $\frac{\sqrt{11}}{3}\cdot\frac{1}{4\sqrt{11}}=\frac{1}{12}\in Q$.

5.Pe laturile AB şi BC ale dreptunghiului ABCD se construiesc în exterior romburile ABMN şi BCPQ. Demonstraţi că patrulaterul ACQM este trapez isoscel dacă şi numai dacă $\sphericalangle$**NAB ≡** $\sphericalangle$**CBQ.**

Ion Tomescu

Soluţie:

1° Considerăm ACQM trapez isoscel cu AM || CQ şi AC = MQ. N, B şi P sunt coliniare şi NP este axa de simetrie a trapezului. Deci m($\sphericalangle$MBQ) = m($\sphericalangle$ABC) = 90^0 şi deci unghiurile ABM şi CBQ sunt suplementare ca şi unghiurile ABM şi BAN. Deci $\sphericalangle$NAB ≡ $\sphericalangle$CBQ.

2° Considerăm $\sphericalangle$NAB ≡ $\sphericalangle$CBQ. Rezultă că CBQ şi ABM sunt suplementare şi $\sphericalangle$QBM este drept. Din Δ ABC ≡ Δ MBQ rezultă AC = MQ (1). m($\sphericalangle$NAB) + m($\sphericalangle$BCP) = 180^0.

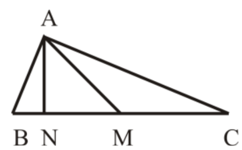
Împărţind la 2 obţinem: m($\measuredangle$MAB) + m(BCQ) = 90^0. Adun cu: m($\measuredangle$BAC) + m($\measuredangle$ACB) = 90^0 şi obţinem: m($\measuredangle$MAC) + m($\measuredangle$ACQ) = 180^0, deci AM || CQ (2). Din (1) şi (2) rezultă că ACQM este trapez isoscel.

CLASA a VIII-a

1.Să se determine măsurile unghiurilor ascuţite, B şi C ale triunghiului dreptunghic ABC ştiind că $\frac{AC}{AB} - \frac{AB}{AC} = 2$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

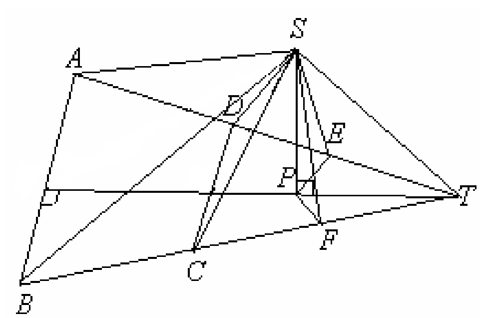
Soluţie



Fie AN ⊥ BC şi M mijlocul ipotenuzei BC, prin urmare BC = 2· AM
Din ipoteza, evident AC > AB. Aducând la acelaşi numitor relaţia din ipoteză se obţine
$AC^2 - AB^2 = 2\cdot AC\cdot AB$ şi ţinând seama şi de teorema lui Pitagora
$AC^2 + AB^2 = BC^2$, adunând cele două relaţii se obţine
$2\cdot AC^2 = BC^2 + 2\cdot AC\cdot AB$, de unde se obţine
$AC\cdot AB = \frac{2\cdot AC^2 - BC^2}{2}$ şi dacă înlocuim BC = 2· AM, vom obţine
$AC\cdot AB = AC^2 - 2\cdot AM^2$.
Pe de altă parte $AC^2 = BC\cdot CN$ şi cum BC = 2· AM vom avea
$AC\cdot AB = 2\cdot AM\cdot CN - 2\cdot AM^2$, adică $AC\cdot AB = 2\cdot AM\cdot(CN - AM)$
şi cum [AM] ≡ [CM], vom obţine $AC\cdot AB = 2\cdot AM\cdot MN$.
Dar folosind teorema a doua a înălţimii se obţine
AN = $\frac{AC\cdot AB}{BC}$, de unde AN = $\frac{2AM\cdot MN}{2AM}$ şi prin urmare [AN] ≡ [MN], ceea ce demonstrează că Δ AMN este dreptunghic isoscel şi prin urmare m(∠AMN) = 45°.
Dar unghiul AMN este unghi exterior triunghiului isoscel AMC, prin urmare
m(∠ACB) = 22°30’ de unde se găseşte că m(∠B) = 67°30’

2.Se consideră trapezul isoscel *ABCD* cu bazele *AB* şi *CD*. Fie *S* un punct în exteriorul planului trapezului, astfel încât triunghiurile *SBC* şi *SAD*, să fie echivalente şi $AD\cap BC = \{T\}$**. Să se determine măsura unghiului dintre dreptele *AB* şi *ST***

Niculai Solomon, Vaslui



Soluție: Fie $P \in (ABC)$ astfel încât $SP \perp (ABC)$.

$$\left.\begin{array}{l} SP \perp (ABC) \\ PE \perp AD \\ PF \perp BC \end{array}\right\} \xrightarrow{T_{3P}} \begin{cases} SE \perp AD \\ SF \perp BC \end{cases}.$$

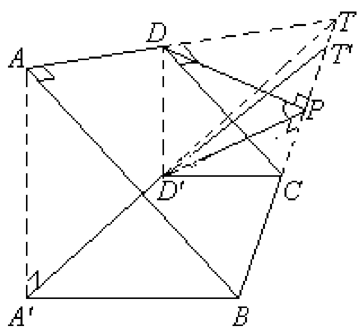
Pentru că triunghiurile *SBC* şi *SAD* sunt echivalente avem

$\frac{AD \cdot SE}{2} = \frac{BC \cdot SF}{2} \Leftrightarrow (SE) \equiv (SF)$. De aici $\Delta SPE \equiv \Delta SPF\ (I.C.) \Rightarrow (PE) \equiv (PF)$ şi [*TP* este bisectoare pentru unghiul *ATB*. Pentru că triunghiul *ABT* este isoscel, bisectoarea [*TP* este şi înălţime. $\left.\begin{array}{l} AB \perp SP \\ AB \perp TP \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SPT) \Rightarrow m\angle(AB, ST) = 90^0$.

3. Se consideră trapezul dreptunghic *ABCD* cu $AB \parallel DC$, $m\angle(DAB) = 90^0$, *AB* = 60 cm, *DC* = 20 cm şi *AD* = 30 cm. Fie *BC* inclusă într-un plan α iar *A'*, *D'* sunt proiecţiile punctelor *A* respectiv *D* pe planul α şi măsura unghiului dintre planul α şi planul trapezului *ABCD* este de 30^0. a) Să se arate că dreptele *AD*, *BC* şi *A'D'* sunt concurente; b) Să se determine perimetrul patrulaterului *A'BCD'*.

Niculai Solomon, Vaslui

Soluţie: Fie $AD \cap BC = \{T\}$ şi $A'D' \cap BC = \{T'\}$. Pentru că $AB \parallel DC$ şi $AA' \parallel DD'$ avem că $(AA'B) \parallel (DD'C)$ şi deci $D'C \parallel A'B$, de unde $\Delta D'DC \sim \Delta A'AB$ şi $\frac{DD'}{AA'} = \frac{DC}{AB} = \frac{D'C}{A'B}$ (1).



Dacă $AB \parallel DC$ avem $\Delta TDC \sim \Delta TAB$, de unde $\frac{TD}{TA} = \frac{DC}{AB} = \frac{TC}{TB}$ (2).

Dacă $D'C \parallel A'B$ avem $\Delta T'D'C \sim \Delta T'A'B$, de unde $\frac{T'D'}{T'A'} = \frac{D'C}{A'B} = \frac{T'C}{T'B}$ (3). Din (1), (2) şi (3) avem $\frac{T'C}{T'B} = \frac{TC}{TB} \Leftrightarrow \frac{TC - TT'}{TB - TT'} = \frac{TC}{TB} \Leftrightarrow TT' = 0 \Rightarrow T = T'$.

Din trapezul dreptunghic *ABCD* avem *BC* = 50 cm.

Din relaţia (2) avem $\frac{TD}{TD + 30} = \frac{20}{60} = \frac{TC}{TC + 50} \Rightarrow$

TD = 15 cm, TC = 25 cm.

Pentru că $\left.\begin{array}{l} DD' \perp \alpha \\ D'P \perp BC \\ D'P, BC \subset \alpha \end{array}\right\} \xrightarrow{T_{3P}} DP \perp BC$, de unde $m\angle(ABC, \alpha) = m\angle(DPD') = 30^0$.

Din triunghiul *DCT* cu $m\angle(TDC) = 90^0$ avem

DP = 12 cm. Din triunghiul *DD'P* cu $m\angle(DD'P) = 90^0$ şi $m\angle(DPD') = 30^0$ avem *DD'* = 6 cm. Din triunghiul *DD'C* cu $m\angle(DD'C) = 90^0$ avem *D'C* = $2\sqrt{111}$ cm.

Din triunghiul $DD'T$ cu $m\angle(DD'T)=90^0$ avem $D'T = 3\sqrt{21}$ cm.

Dacă $DD' \parallel AA'$ avem $\Delta TDD' \sim \Delta TAA'$, de unde $\frac{TD}{TA}=\frac{DD'}{AA'}=\frac{TD'}{TA'}$ şi deci $A'D' = 6\sqrt{21}$ cm.

Din relaţia (3) avem $\frac{2\sqrt{111}}{A'B}=\frac{25}{75}\Rightarrow A'B=6\sqrt{111}$. $P_{[A'BCD']}=50+8\sqrt{111}+6\sqrt{21}$ cm.

4. a) Dacă x, y şi z sunt numere reale şi x < y < z, demonstraţi că $\frac{z-x}{y-x}+\frac{z-x}{z-y}\geq 4$ **.**

b) Arătaţi că $\frac{1}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}\geq\left(\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^2$ **.**

Nicolae Angelescu

Soluţie: a) Calculăm diferenţa $d=\frac{z-x}{y-x}+\frac{z-x}{z-y}-4$; $d=\frac{(z+x-2y)^2}{(y-x)\cdot(z-y)}$.

Cum x < y şi y < z, avem y – x > 0 şi z – y > 0 şi deci d > 0. Rezultă relaţia cerută.

b) Inegalitatea de la a) se mai poate scrie:

$(z-x)^2-4(y-x)\cdot(z-y)\geq 0$. Scriem această relaţie sub forma:

$\frac{1}{(z-y)(y-x)}\geq\left(\frac{2}{z-x}\right)^2$. Înlocuind $z=\sqrt{7}$, $y=\sqrt{5}$ şi $x=\sqrt{3}$ obţinem inegalitatea cerută

5. Aflaţi numerele întregi nenule x şi y astfel încât $\frac{1}{3x}+\frac{1}{4y}=\frac{1}{6}$ **.**

Petre Năchilă

Soluţie:

Din ecuaţie rezultă

$y=\frac{3x}{2x-4}$; $x\neq 2$; $2y=\frac{6x-12+12}{2x-4}=3+\frac{6}{x-2}\in \mathbf{Z}$.

$x-2\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}\Rightarrow x\in\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$.

$(x, y)\in\{(-4, 1), (4, 3); (8,2)\}$.