VI. TEOREMA ÎMPĂRŢIRII CU REST

Oricare ar fi două numere naturale a şi b cu b≠0, există şi sunt unice două numere naturale q şi r astfel încât:

$a=bq+r$ şi $r<b$, unde a=deîmpărţitul
b=împărţitorul
c=câtul împărţirii
r=restul împărţirii

<u>*Proprietăţi*</u>

1) Dacă adăugăm lui a un multiplu a lui b, atunci restul împărţirii nu se schimbă.

$$a + mb = bq_1 + r$$

2) Dacă înmulţim deîmpărţitul şi împărţitorul cu un număr, atunci restul se înmulţeşte cu acel număr.

$$am = bqm + mr, \quad \text{unde } mr < mb$$

3) Dacă numerele a şi b se împart cu un număr $m \neq 0$, atunci şi restul se împarte cu acelaşi număr.

$$a_2 = b_2 q + r:m, \quad \text{unde } a_2 m = a,\ b_2 m = b$$

4) Dacă două numere naturale dau acelaşi rest la împărţire cu un număr m, atunci diferenţa lor se împarte exact la acel număr

$$a - b = m(q_1 - q_2)$$

Probleme rezolvate

1. Suma a două numere naturale este 122. Împărţind cele două numere se obţine un rest egal cu dublul câtului. Aflaţi cele două numere stiind că suma dintre cât şi rest este 9.

<u>Rezolvare:</u>

Fie a şi b cele două numere, cu $a>b \Rightarrow a+b=122$ şi $a=bc+2c$, $2c<b$. $c+r=9 \Rightarrow c+2c=9 \Rightarrow 3c=9 \Rightarrow c=3 \Rightarrow a=3b+6$ înlocuind în $a+b=122$ obţinem $4b+6=122$, de unde $b=29$ şi $a=93$

2. Împărţind numărul natural a la numărul natural b obţinem câtul 8 şi restul 15. Demonstraţi că $3a-24b-20$ este divizibil cu 5.

<u>Rezolvare:</u>

Conform teoremei împărţirii cu rest $a=8b+15$, $15<b$. $3a-24b-20=3(8b+15)-24b-20=24b+45-24b-20=25$ divizibil cu 5.

3. Trei numere naturale sunt astfel încât al doilea este media aritmetică dintre primul şi al treilea; împărţind suma dintre primul şi al treilea număr la al treilea număr se obţine câtul 1 şi restul 14; împărţind suma dintre primul şi al doilea la al treilea număr se obţine câtul 1 şi restul 12. Aflaţi cele trei numere.

<u>Rezolvare:</u>

Fie a, b, c cele trei numere naturale $a=\frac{b+c}{2} \Rightarrow 2a=b+c$; din teorema împărţirii cu rest $a+c=c+14$, $14 < c$ $\Rightarrow a=14$, $a+b=c+12$, $12< c \Rightarrow 14+b=c+12 \Rightarrow c=b+2$, dar $2\cdot 14=b+b+2 \Rightarrow b=13$ şi $c=15$.

4. Diferenţa a două numere naturale este 91. Dacă împărţim cele două numere se obţine un cât egal cu jumătatea împărţitorului şi restul egal cu câtul. Aflaţi numerele.

<u>Rezolvare:</u>

Fie a şi b cele două numere, cu a>b. Conform teoremei împărţirii cu rest $a=b\cdot c+r$, $r<b$ şi $b=2c$, $r=c$, $a-b = 91 \Rightarrow a=b\cdot c+r$ scădem b şi obţinem $a-b=b\cdot c+c-b \Rightarrow 91\cdot 2=b\cdot 2c+2c-2b \Rightarrow 182=b^2-b \Rightarrow 13\cdot 14=b(b+1) \Rightarrow b=14$, $c=7$, $a=105$.

5. Împărţind două numere naturale se obţine un cât şi un rest astfel încât suma dintre cât şi împărţitor este egală cu 14, suma dintre împărţitor şi rest este egală cu 11, iar suma dintre deîmpărţit, împărţitor şi cât este egală cu 65. Aflaţi cele două numere.

Rezolvare:

Fie a şi b cele două numere, cu a>b. Conform teoremei împărţirii cu rest $a=b\cdot c+r$, $r<b$, $b+c=14$, $b+r=11$, $a+b+c=65$. Din $a+b+c=65$ şi $b+c=14$ $\Rightarrow a=51$. $b+c=14$ $\Rightarrow c=14-b$, $b+r=11\Rightarrow r=11-b$ înlocuind în $a=b\cdot c+r$ obţinem $51=b(14-b)+11-b\Rightarrow 51=b(14-b-1)+11\Rightarrow 40=b(13-b)\Rightarrow 5\cdot 8=b(13-b)\Rightarrow b=5$.

6. Suma a trei numere naturale este egală cu 92. Aflaţi numerele ştiind că dacă împărţim al doilea număr la primul se obţine câtul 2 şi restul 2, iar dacă împărţim al treilea la al doilea obţinem, din nou, câtul 2 şi restul 2.

Rezolvare:

Fie a, b şi c cele trei numere, cu $a+b+c=92$. Conform teoremei împărţirii cu rest $b=a\cdot 2+2$, $2<a$ şi $c=b\cdot 2+2$, $2<b\Rightarrow c=(a\cdot 2+2)\cdot 2+2\Rightarrow c=4\cdot a+6$, înlocuind b şi c în relaţia $a+b+c=92$ obţinem $a+a\cdot 2+2+4\cdot a+6=92\Rightarrow 7\cdot a=84\Rightarrow a=12$, $b=26$, $c=54$.

7. Aflaţi cel mai mic număr natural de patru cifre care împărţit la un număr de două cifre dă restul 98.

Rezolvare:

Fie a numărul natural de patru cifre şi b numărul de două cifre. Conform teoremei împărţirii cu rest $a=b\cdot c+r$, $r<b$ deci $b\geq 99$. Cum b este un număr de două cifre rezultă că $b=99$, a trebuie să fie cel mai mic număr de patru cifre $a=99\cdot c+98\Rightarrow a=1088$.

8. Se consideră două numere naturale astfel încât suma dintre dublul primului număr şi triplul celui de-al doilea este 2488. Împărţind primul număr la sfertul celui de-al doilea, obţinem câtul 3 şi restul 2. Aflaţi cele două numere. (Argeş, et. locală)

Rezolvare:

Fie a şi b cele două numere $\Rightarrow 2a+3b=2488$. Notăm sfertul lui b cu x, atunci $b=4x$ şi conform teoremei împărţirii cu rest $a=x\cdot 3+2$, $r<x$ $\Rightarrow 2(x\cdot 3+2)+3\cdot 4x=2488\Rightarrow 6x+4+12x=2488\Rightarrow 18x=2484\Rightarrow x=138$ $\Rightarrow b=552$ şi $a=416$.

9. Determinaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ (scris în baza 10) care împărţite la $\overline{bc}$ (scris în baza 10) dau câtul 5 şi restul $\overline{bc}-5$.(Brăila, et. locală)

Rezolvare:

Conform teoremei împărţirii cu rest $\overline{abc}=\overline{bc}\cdot 5+\overline{bc}-5$, $\overline{abc}=\overline{bc}\cdot 6-5$, din scrierea desfăşurată în baza 10 rezultă $100\cdot a+\overline{bc}=6\cdot\overline{bc}-5\Rightarrow 100\cdot a+5=5\cdot\overline{bc}$ împărţim relaţia la 5 şi obţinem $20\cdot a+1=\overline{bc}$.

Dacă $a=1\Rightarrow\overline{bc}=21\Rightarrow\overline{abc}=121$, verificăm $121=5\cdot 21+(21-5)$ adevărat.

Dacă $a=2\Rightarrow\overline{bc}=41\Rightarrow\overline{abc}=241$, verificăm $241=5\cdot 41+(41-5)$ adevărat.

Dacă $a=3\Rightarrow\overline{bc}=61\Rightarrow\overline{abc}=361$, verificăm $361=5\cdot 61+(61-5)$ adevărat.

Dacă $a=4\Rightarrow\overline{bc}=81\Rightarrow\overline{abc}=481$, verificăm $481=5\cdot 81+(81-5)$ adevărat.

Dacă $a\geq 5\Rightarrow\overline{bc}=20\cdot 5+1>100$, dar $\overline{bc}\leq 99$, deci $\overline{abc}\in\{121,241,361,481\}$.

10. Să se determine suma tuturor resturilor împărţirilor la 10 ale numerelor naturale n, cu proprietatea $0\leq n\leq 2009$.(Bucureşti, et. locală)

Rezolvare:

Resturile posibile la împărţirea cu 10 sunt 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 cu suma $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Cum $0\leq n\leq 2009$ rezultă că sunt 2010 numere şi $2010:10=201$, atunci suma este $201\cdot 45=9045$.

11. Să se determine restul împărţirii numărului $21^{2004}-10$ la 63. (

Rezolvare:

Ţinând cont că $21=3\cdot 7$ şi $63=9\cdot 7$ vom scrie $21^{2004}-10=21^2\cdot 21^{2002}-10=63\cdot 7\cdot 21^{2002}-63+53=63(7\cdot 21^{2002}-1)+53$, deci restul este 53.

12. Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ şi $\overline{xy}$ ştiind că, împărţind numărul $\overline{abc}$ la $\overline{xy}$ obţinem câtul 10 şi restul 89. (Galaţi, et. locală)

Rezolvare:

Condiţia restului din teorema împărţirii cu rest $\overline{abc} = \overline{xy} \cdot 10 + 89$, se obţine că $89 < \overline{xy}$, de unde $\overline{xy} \in \{90, 91, ...99\}$. Dacă $\overline{xy} = 90 \Rightarrow \overline{abc} = 90 \cdot 10 + 89 = 989$, dacă $\overline{xy} = 91 \Rightarrow \overline{abc} = 91 \cdot 10 + 89 = 999$, dacă $\overline{xy} > 91$, atunci $\overline{abc} > 999$, contradicţie cu faptul că numărul $\overline{abc}$ are 3 cifre. Deci, singurele soluţii sunt cele două găsite mai sus.

13. Determinaţi toate numerele naturale n care au proprietatea că numărul $a = 25^n + 5^n$ dă restul 25 la împărţirea cu 625.

Rezolvare:

Verificăm pentru n=0 şi n=1, constatăm că pentru aceste valori nu sunt îndeplinite condiţiile din ipoteză. Dacă $n=2 \Rightarrow a = 625 + 25$, deci este soluţie. Demonstrăm că această soluţie este unică. Dacă $n=3 \Rightarrow a = M_{625} + 125$, iar dacă $n \geq 4 \Rightarrow a = 25^n + 5^n = 25^2 \cdot 25^{n-2} + 5^4 \cdot 5^{n-4} = 625 \cdot 25^{n-2} + 625 \cdot 5^{n-4} = M_{625}$

Probleme propuse

1. Un număr natural împărţit la 8 dă restul 5 şi împărţit la 9 dă restul 7. Ce rest va da numărul împărţit prin 72 ? (Gazeta Matematică-seria B)
2. Aflaţi numerele naturale a, b, c ştiind că a împărţit la b dă câtul 4 şi restul 3, b împărţit la c dă câtul 3 şi restul 2, iar $a + b - 2c = 78$.
3. Considerăm mulţimea tuturor numerelor naturale care împărţite la 101 dau câtul egal cu restul. Arătaţi că dublul sumei elementelor acestei mulţimi se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive. (Caraş-Severin, et. locală)
4. Împărţind numărul natural a la numărul natural b obţinem câtul 11 şi restul 16. Determinaţi numerele naturale a şi b dacă $3a - 17b \leq 320$.
5. Suma a 10 numere naturale este 2009. Împărţind fiecare din aceste numere la numărul natural nenul n se obţin numai resturi egale cu 2 sau cu 3. Suma tuturor acestor resturi este egală cu 28.
   a) Câte resturi din cele 10, sunt egale cu 2?
   b) Determinaţi cel mai mic număr n care satisface condiţiile din enunţ. (Constanţa, et. locală)
6. Fie $n \in N$ astfel încât $13n+8$ dă restul 13 la împărţirea cu 80, $8n+5$ dă restul 5 la împărţirea cu 50. Determinaţi ultimele două cifre ale lui n. (Brăila, et. locală)
7. Să se determine toate perechile de numere naturale nenule, ştiind că împărţindu-l pe primul la al doilea şi pe al doilea la primul se obţine, de fiecare dată, suma între cât şi rest egală cu 4. (Constanţa, et. judeţeană)
8. Determinaţi cel mai mare număr de forma $\overline{xyz6}$ (scris în baza 10) care împărţit la un număr de două cifre să dea restul 98. (Dâmboviţa, et. locală)
9. Arătaţi că nu există niciun număr natural care împărţit la 35 dă restul 7 şi împărţit la 21 dă restul 6. (Dolj, et. locală)
10. Fie a,b,c trei numere naturale care împărţite pe rând la 2009 dau resturile 1935, 700, 800. Să se determine restul împărţirii numărului $a+3b+5c$ la 2009. (Galaţi, et. judeţeană)
11. Împărţind numărul natural a la numărul natural b obţinem câtul 3 şi restul 14.
   a) Arătaţi că $3a - 9b + 7$ este pătrat perfect.
   b) Determinaţi a şi b ştiind că b este cel mai mic număr natural nenul care satisface condiţiile date.

(Concursul G. Moisil - Cluj Napoca)

12. Prin împărţirea numărului $n = 1 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{98}$ la 100 se obţine câtul c şi restul r. Să se arate că r divide pe c. (Dolj, et. judeţeană)

13. Fie n un număr natural cu proprietatea că împărţit la 34 dă restul egal cu dublul câtului.

a) Determinaţi n ştiind că are două cifre.

b) Aflaţi numerele naturale n care sunt pătrate perfecte. (Buzău, et. judeţeană)

14. Trei numere naturale consecutive se împart pe rând la un număr natural de două cifre, iar suma celor trei resturi obţinute este 101. Ce rest obţinem dacă împărţim primul număr la 52?

15. Aflaţi cel mai mare cât ce se poate obţine prin împărţirea numărului 2012 la un număr natural n, ştiind că restul este egal cu $2n-88$.

Soluţii probleme propuse

1. Conform teoremei împărţirii cu rest $a=8c_1+5$ şi $a=9c_2+7$ înmulţim prima relaţie cu 9 şi a doua cu 8 şi scădem cele două relaţii (pentru a efectua scăderea vom scrie prima relaţie $9a=72(c_1-1)+72+45) \Rightarrow r=61$; 2. Se scriu relaţiile corespunzătoare teoremei împărţirii cu rest şi se înlocuiesc numerele a şi b în funcţie de c în ultima relaţie, de unde a=56, b=14, c=4; 3. Din teorema împărţirii cu rest rezultă $n=102\cdot c$, cu $r<101$; $n\in\{0,102,204,306,...,10200\}$ şi dublul sumei elementelor mulţimii este $100\cdot101\cdot102$; 4. Din condiţia restului rezultă $b\geq17$ şi din prelucrarea inegalităţii rezultă $b\leq17$, deci b=17 şi a=203; 5. a) Ţinând cont că $r_1+r_2+r_3+\ldots+r_{10}=28$ şi $r_i\in\{2,3\}$ rezultă că două resturi pot fi egale cu 2; b) scriind teorema împărţirii cu rest şi calculând suma numerelor obţinem relaţia $1981=n\cdot(c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{10})$ $1981=7\cdot283$, deci n=7; 6. Din teorema împărţirii cu rest rezultă $13n=80c_1+5$ şi $8n=50c_2$ înmulţind convenabil relaţiile şi scăzându-le obţinem $n=400(c_1-c_2)+25$, deci ultimele două cifre ale lui n vor fi 2 şi 5;7.; 8. Din condiţia restului rezultă că împărţitorul este 99, şi din teorema împărţirii cu rest obţinem $\overline{xyz7}$ multiplu de 99, numărul căutat este 9206; 9. Se scriu relaţiile corespunzătoare teoremei împărţirii cu rest şi se constată că din prima relaţie deîmpărţitul este M_7 şi din a doua relaţie este M_7-1; 10. Se scriu relaţiile corespunzătoare teoremei împărţirii cu rest şi se constată că $a+3b+5c=2009(c_1+c_2+c_3+3)+2008$, deci restul este 2008; 11. a) Se scriu relaţiile corespunzătoare teoremei împărţirii cu rest şi se constată că $3a-9b+7$ este egal cu 49, pătrat perfect; b) Din condiţia restului $b\geq15$, deci b=15 şi a=59; 12. Se grupează termenii sumei câte 4 începând de la puterea maximă $n=(5^{98}+5^{97}+5^{96}+5^{95})+\ldots+(5^6+5^5+5^4+5^3)+(5^2+5^1+5^0)=M_{100}+M_{100}+\ldots+M_{100}+31=M_{100}+31$, grupând termenii sumei câte trei şi dând factor comun obţinem $n=31\cdot(1+5^3+\ldots+5^{96})$ deci $n=100c+31=31\cdot k$, de unde rezultă că $31|\ c$; 13. a) Din teorema împărţirii cu rest obţinem n=36c, cum n are două cifre numerele cerute sunt 36 şi 72; b) $n=6^2\cdot c$, $0\leq c<17\Rightarrow n\in\{0,36,144,324,576\}$; 14. Fie n, n+1, n+2 cele trei numere şi a numărul de două cifre, resturile obţinute nu pot fi numere consecutive deoarece suma lor s-ar divide cu 3, dar 101 nu este divizibil cu 3. Atunci resturile pot fi: 1. $(r-1)$, 0, $1\Rightarrow(r-1)+0+1=101$ $\Rightarrow r=101$, dar r< a care este un număr de două cifre; 2. $(r-2)$, $(r-1)$, 0 $\Rightarrow(r-2)+(r-1)+0=101\Rightarrow r=52$ $\Rightarrow 52|\ n+2$, deci n dă restul 50 la împărţirea cu 52; 15. Din condiţia restului şi $2n-88\in N\Rightarrow 43\leq n<88$. Din teorema împărţirii cu rest $\Rightarrow 2100=n(c+2)$, pentru ca c să fie cel mai mare trebuie ca n să fie cel mai mic posibil, de unde n=50 şi c=40.

Fişă de activitate

1. a) Aflaţi câte numere naturale există, care împărţite la 320 dau câtul egal cu restul. Arataţi că 2247 face parte dintre ele şi că toate sunt divizibile cu 321.

b) Aflaţi câte numere de 4 cifre îndeplinesc condiţiile de la punctul a) şi calculaţi suma lor. (Gorj, et. judeţeană)

2. Suma a patru numere naturale este 420. Dacă se împart cele patru numere prin acelaşi număr natural nenul se obţin câturile numere naturale consecutive, iar resturile 1, 2, 3 şi respectiv 4. Determinaţi numerele. (Hunedoara, et. locală)

3. Să se determine numerele naturale nenule care împărţite la 9 dau câtul q şi restul r, iar împărţite la 17 dau câtul r şi restul q.

4. Să se determine cel mai mare şi cel mai mic număr natural de forma $\overline{abcd}$ (scris în baza 10) care împărţit la $\overline{ab5}$ dă câtul un număr de două cifre şi restul o putere a lui 3. (Concursul N. Coculescu, Slatina)

5. Suma a două numere naturale este 2009, iar dacă împărţim numărul mare la sfertul numărului mic obţinem câtul şi restul egale cu 7. Aflaţi numerele. (Maramureş, et. locală)

6. Aflaţi numerele naturale de două cifre a şi b ştiind că dacă împărţim pe a la b obţinem restul 30, iar dacă împărţim pe b la a obţinem restul 35. (Maramureş, et. judeţeană)

7. Împărţind numărul natural a la 2008 obţinem restul 512. Aflaţi restul împărţirii lui a la 251. (Mehedinţi, et. locală)

8. a) Împărţind numerele 6965, 3806 şi 2564 la acelaşi număr natural n obţinem resturile 35, 26 şi respectiv 44. Aflaţi cea mai mare valoare a numărului n.

b) Fie x şi y două numere naturale care verifică egalitatea: $5x+7y=2011$. Arătaţi că $285<x+y<403$. (Concursul Pitagora - Rm. Vâlcea)

9. Determinaţi numerele ştiind că dacă împărţim numărul 2009 la numărul obţinem câtul şi restul d. (Mehedinţi, et. judeţeană)

10. Între împărţitor, cât şi rest există relaţia $\hat{\imath}^2 + c^2 + r^2 = 29$. Determinaţi împărţitorul, câtul, restul şi deîmpărţitul. (RMT, 2000)

11. La o împărţire a două numere naturale, suma dintre cât, împărţitor şi rest este 114. Ştiind că diferenţa dintre cât şi împărţitor este 55, iar împărţitorul este cu 2 mai mic decât triplul restului, aflaţi cele două numere. (Olt, et. locală)

12. Să se determine cel mai mare număr natural $\overline{abcd}$ care împărţit la $\overline{aad}$ dă câtul 8 şi restul $\overline{abd}$. (Bucureşti, et. locală)

13. a) Aflaţi restul împărţirii numărului $B=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2009 + 3$ la 8.

b) Aflaţi restul împărţirii numărului $B=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2009-3$ la 8. (Timiş, et. locală)

14. Fie numerele $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{2009}$, care, împărţite la un număr natural nenul n, dau resturi diferite două câte două şi câturi nenule, diferite două câte două.

a) Arătaţi că $n\geq2009$.

b) Calculaţi cea mai mică valoare a sumei $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2009}$. (Timiş, et. judeţeană)

15. Aflaţi cel mai mic număr natural, multiplu de 9, care împărţit la 14 dă restul 13 şi împărţit la 13 dă restul 12. (Concursul interjudeţean Elena Bădilă - Giurgiu)

16. Determinaţi câtul şi restul împărţirii lui A la B, dacă $A=7\cdot2^{n+4}+5\cdot2^{n+2}$, $b=9\cdot2^n$ unde $n\in N$. (Dâmboviţa, et. locală)

17. Se consideră numărul $x=2^{n+1}\cdot5^n+2^n\cdot5^{n+1}+2012$, unde $n\in N$, $n\geq4$. Determinaţi câtul şi restul împărţirii numărului x la 3. (Sibiu, et. locală)

18. Se consideră n numere naturale consecutive. Suma resturilor împărţirii celor n numere la 7 este 156. Aflaţi toate valorile posibile ale lui n. (Gazeta Matematică)

19. Fie a, b, c, d numere naturale care împărţite la 5 dau câturi numere impare consecutive şi resturi nenule diferite. Determinaţi ultimele 2008 cifre ale numărului $(a+b+c+d)^{2008}$. (Gorj, et. locală)

20. Aflaţi suma numerelor naturale pare care împărţite la 29 dau restul egal cu dublul câtului. (Sălaj, et. locală)