V. BAZE DE NUMERAŢIE

Sistemul de numeraţie în baza 10 se numeşte sistem zecimal.
Cifrele utilizate în sistemul zecimal sunt 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Un număr natural N se scrie în mod unic astfel:

$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+...+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$, $a_n\neq 0$

Scrierea numerelor naturale este poziţională, de la dreapta la stânga vom avea: unităţi, zeci, sute, mii, zeci de mii, sute de mii,...

Ex.: $\overline{abc}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$, unde $a,b,c\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a\neq 0$

Cel mai răspândit sistem de numeraţie este cel cu baza 10, numit sistemul zecimal.
În informatică sunt folosite şi alte baze de numeraţie, de exemplu baza 2 (sistem binar) este limbajul circuitelor electronice, baza 16 (sistem hexazecimal) şi este folosit în programarea calculatoarelor. Are avantajul că este relativ apropiat de sistemul zecimal şi că numerele scrise în baza 16 pot fi foarte uşor convertite în baza de numeraţie 2.
Dacă alegem ca sistem de numeraţie numărul $b\in N$, $b\geq 2$, atunci un număr natural N se scrie în mod unic astfel:

$N=a_n\cdot b^n+a_{n-1}\cdot b^{n-1}+a_{n-2}\cdot b^{n-2}+...+a_1\cdot b^1+a_0\cdot 1b^0=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}_{(b)}$, $a_n\neq 0$

Cifrele bazei b sunt elemente din mulţimea $\{0,1,2,...,b-1\}$

Obs.: Dacă baza este mai amre de 10, trebuie introduse simboluri suplimentare. Pentru baza 16 avem următoarele cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A,B,C,D,E,F unde A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15
Pentru a trece un număr din baza 10 în baza 16 se procedează astfel : se împarte succesiv la 16 numărul (apoi câturile ş.a.m.d.) , reţinându-se resturile , după care , dacă acestea sunt 10,11,12,13,14,15 se înlocuiesc respectiv cu A,B,C,D,E,F ; resturile obţinute formează cifrele numărului scris în baza 16 (de la ultimul rest la primul) .
Exemplu: $2156_{(10)}=..._{(16)}$
$2156 = 134 \times 16 + 12 \Rightarrow 134 = 8 \times 16 + 6 \Rightarrow 8 = 0 \times 16 + 8 \Rightarrow X = 86C_{(16)}$
Transformarea unui număr de forma baza $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}_{(b)}$ în baza 10
$213_{(5)}=2\cdot 5^2+1\cdot 5^1+3\cdot 5^0$
Transformarea unui număr din baza 10 în altă bază b
-împărţim numărul N la b, iar câtul obţinut îl împărţim la b şi continuăm până obţinem câtul 0. Resturile scrise în ordinea inversă efectuării operaţiilor constituie cifrele numărului în baza b.
256 îl trecem în baza 7 folosind algoritmul prezentat şi obţinem $256=514_{(7)}$

Regulile de adunare în baza 2
1+1=10
0+0=0
0+1=1+0=1
Regulile de înmulţire în baza 2
1×0=0
1×1=1
0×0=0

Regulile de adunare în baza 5
1+1=2
1+4=10
2+4=11
Reguli de înmulţire în baza 5:
1×4=4
2×2=4
2×4=13
4×4=31

Trecerea din baza u în baza u^k
Pentru conversia unui număr din baza u în baza u^k se aplică algoritmul următor:
se grupează cifrele numărului în baza u în grupe de câte k elemente, începând de la dreapta;
· valoarea fiecărei grupe, în baza 10, corespunde unei cifre în baza u^k;

· *numărul în baza uk este format din cifrele obţinute prin conversiile de la pasul precedent.*
Exemple:
1) Se cere să se convertească numărul $102001121_{(3)}$ în baza 9.
Cum $9 = 3^2$, împărţim numărul în grupe de câte două cifre:
$102001121_{(3)} = 1'02'00'11'21_{(3)} = 12047_{(9)}$
Convertim fiecare grupă în baza 9:
$21(3) = 2\cdot3^1 + 1\cdot3^0 = 7_{(9)}$
$11(3) = 1\cdot3^1 + 1\cdot3^0 = 4_{(9)}$
$00_{(3)} = 0\cdot3^1 + 0\cdot3^0 = 0_{(9)}$
$02_{(3)} = 0\cdot3^1 + 2\cdot3^0 = 2_{(9)}$
$01_{(3)} = 0\cdot3^1 + 1\cdot3^0 = 1_{(9)}$
Obţinem:
$102001121_{(3)} = 12047_{(9)}$

Probleme rezolvate

1. Să se scrie numărul natural 78 ca sumă de puteri naturale ale numărului 2.

Rezolvare:
Transformăm numărul 78 din baza 10 în baza 2.
78:2=39; 39:2=19; 19:2=9; 9:2=4; 4:2=2; 2:2=**1** $\Rightarrow 78=1001110_{(2)}$ $78=1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2$
0 **1** **1** **1** **0** **0**
$\Rightarrow 78=1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0$

2. Care este cel mai mic şi respectiv cel mai mare număr natural scris în baza 2 format din cinci cifre?

Rezolvare:
Fie $\overline{1abcd}_{(2)}$, cel mai mic număr va fi $10000_{(2)}=16$, iar cel mai mare număr va fi $11111_{(2)}=31$.

3. Să se determine bazele de numeraţie x,y,z pentru care are loc egalitatea: $21_{(x)} - 13_{(y)} + 51_{(z)} = \overline{zy}$. (Ialomiţa, et. locală)

Rezolvare:
Din cifrele utilizate în scrierea numerelor rezultă $x \geq 3$, $y \geq 4$, $z \geq 6$ şi $z,y \in \{1,2,3,...,9\}$. Egalitatea din enunţ devine $2x+1-(y+3) + 5z + 1= 10z + y \Rightarrow 5(z + 1)=8x \Rightarrow x=5k$, $k\in N$, $k\neq 0$, $z=8k-1$, $y \geq 4$. Deci x=5, y=7, $y\in \{4,5,6,7,8,9\}$.

4. Un număr de trei cifre în baza 8 este egal cu răsturnatul său în baza 7. Aflaţi numărul în baza 10. (Arad, et. judeţeană)

Rezolvare:
Fie $abc_{(8)}$ $\Rightarrow a\cdot8^2+b\cdot8+c= c\cdot7^2+b\cdot7+a \Rightarrow 63\cdot a+b - 48\cdot c=0 \Rightarrow b=3\cdot(16\cdot c - 21\cdot a)$ $\Rightarrow b\in\{0,3,6\}$. Dacă b=0 $\Rightarrow 16\cdot c-21\cdot a=0$ imposibil; dacă $b=3 \Rightarrow 16\cdot c-21\cdot a=0 \Rightarrow a=3$, c=4; dacă $b=6 \Rightarrow a=6$, c=8 imposibil doarece c e cifră în baza 8, deci $c\leq7 \Rightarrow$ numărul cerut este $3\cdot8^2+3\cdot8+4=220$.

5. Calculaţi : a) $11.001_{(2)} + 1.001_{(2)}$; b) $1.111_{(2)} + 111_{(2)}$; c) $234_{(5)} + 212_{(5)}$

Rezolvare:

a)	b)	c)
$11.001_{(2)}+$	$1.111_{(2)}+$	$234_{(5)}+$
$1.001_{(2)}$	$111_{(2)}$	$212_{(5)}$
$10.0010_{(2)}$	$10.110_{(2)}$	$1001_{(5)}$

6. Dacă $6_{(x)} \cdot 8_{(x)} = 58_{(x)}$, scrieţi numărul $1203_{(x)}$ în baza 10.

Rezolvare:

$6_{(x)} \cdot 8_{(x)} = 58_{(x)} \Rightarrow 6 \cdot 8 = 5x + 8 \Rightarrow 48 = 5x+8 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8$
$1203_{(8)}=1\cdot 8^3+2\cdot 8^2+3=512+128+3=643$

7. Să se determine numerele naturale x,y,z din egalitatea: $4\cdot 8^x+8\cdot 4^y+2\cdot 16^z=2592$. (Gazeta matematică, seria B)

Rezolvare:
$2^{3x+2}+2^{2y+3}+2^{4z+1}=2592$, transformăm 2592 din baza 10 în baza 2 şi obţinem $2592=2^{11}+2^9+2^5$, dar scrierea unui număr este unică $\Rightarrow$ x=3, y=3, z=1 sau x=3, y=1, z=2 sau x=1, y=4, z=2.

8. Să se determine numerele naturale de 3 cifre, scrise în baza 10, ştiind că în baza 9 se scriu $\overline{aba}$, iar în baza 13 se scriu $\overline{bab}$.

Rezolvare:
$\overline{aba}_{(9)}=\overline{bab}_{(13)}$ a,b< 9
$a\cdot 9^2 + b\cdot 9 + a=b\cdot 13^2+ a\cdot 13 + b \Rightarrow 81a + 9b + a=169b + 13a + b \Rightarrow 82a + 9b = 170b + 13a \Rightarrow 69a=161b$
$\Rightarrow 3a = 7b \Rightarrow a=7, b=3$. Numărul este $\overline{aba}_{(9)} = \overline{737}_{(9)} =7\cdot 9^2 + 3\cdot 9 + 7 = 567 + 27 + 7 = 601$

9. Comparaţi numerele $a=7^{29}+7^{21}+7^{14}$ şi $b=7^{30}+1$. (Gazeta matematică, seria B)

Rezolvare:
Scriem numerele în baza 7 şi constatăm că a are 30 de cifre şi b are 31 de cifre, deci a<b.

10. a) Calculaţi $71_{(9)} - 61_{(8)} + 51_{(7)} - 41_{(6)} + 31_{(5)} - 21_{(4)}$.
b) Aflaţi x şi y astfel încât $51_{(x)}+ 71_{(y)}=10^2$, unde x şi y reprezintă baze de numeraţie.(Sibiu, et. locală)

Rezolvare:
a) $7\cdot 9+1-(6\cdot 8+1)+5\cdot 7+1-(4\cdot 6+1)+3\cdot 5+1-(2\cdot 4+1)=33$
b) $5x+1+7y+1=100 \Rightarrow 5x+7y=98 \Rightarrow 5x=98-7y \Rightarrow 5x=7(14-y) \Rightarrow x=7$ şi $y=9$.

11. a) Să se determine numerele naturale nenule x şi y, ştiind că $25_{(x)}+14_{(y)}=222_{(3)}$
b) Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $2^c+3^b+9^a=811$ (Gazeta matematică, seria B)

Rezolvare:
a) $2x+5+y+4=2\cdot 3^2+2\cdot 3+2 \Rightarrow 2x+y=17$ deoarece $x \geq 6$ şi $y \geq 5 \Rightarrow x=6, y=5$; b) deoarece 3^b, 9^a şi 811 sunt numere impare pentru a avea egalitatea $\Rightarrow 2^c$ impar cu singura soluţie $c=0 \Rightarrow 3^b+9^a=810 \Rightarrow 3^b+(3)^{2a}=810$, dacă $a=0 \Rightarrow 3^b=810$, fals; dacă $a=1 \Rightarrow 3^b=801$, fals; dacă $a=3 \Rightarrow 3^b=729 \Rightarrow b=6$; dacă $a=4 \Rightarrow 3^b=81, \Rightarrow b=4$, de unde $\overline{abc} \in \{260, 340\}$

12. Scrieţi numărul 27067 ca sumă de puteri distincte ale lui 3. (Concursul Arhimede)

Rezolvare:
Vom transforma numărul 27067 din baza 10 în baza $3 \Rightarrow 27067=1101010111_{(3)} \Rightarrow 27067 =3^9+3^8+3^6 +3^4 +3^2+3^1+3^0$.

Probleme propuse

1. Comparaţi numerele: $2^{46} +2^{36}$ şi $2^{40} + 2^{23} + 2^{10}$.
2. Scrieţi numărul 2809 din baza 10 în baza 16.
3. Fie numerele $\overline{abc}$ şi $\overline{xyz}$ scrise în baza 10.

a) Aflaţi numărul $\overline{bca}$, ştiind că prin împărţirea numărului $\overline{abc}$ la numărul $\overline{cab}$ se obţine câtul 2 şi restul 114.

b) Pentru numerele determinate anterior, comparaţi numerele 5^{a+b+c} şi 3^{x+y+z}, ştiind că $\overline{xyz}=2544_{(7)}$ (Sibiu, et. judeţeană)

4. Determinaţi baza de numeraţie $123_{(x)}+ 321_{(x)}=228$. (Bihor, et. locală)

5. Să se arate că în sistemul de numeraţie cu baza 6 niciun număr format din m cifre ($m \geq 2$), toate egale, nu este pătrat perfect. (Concursul Ghe. Ţiţeica)
6. a) Arătaţi că $1010001_{(2)}=1001^2_{(2)}$ şi $100100001_{(2)}= 10001^2_{(2)}$
b) Aflaţi pătratul cărui număr (scris în baza 10) este numărul $1000010000001_{(2)}$ şi arătaţi că el este divizibil cu 169. (Sibiu, et. locală)
7. Aflaţi ultimele patru cifre ale numărului 5^{4321}, atunci când se scrie în sistemul binar (Concursul Arhimede)
8. În ce bază de numeraţie numerele 31 şi 175 sunt puteri consecutive ale lui 5? (Gazeta matematică, seria B)
9. a) Să se scrie numărul 2009 din baza zece în baza 2.
b) Suma de 2009 lei este împărţit în mai multe plicuri. Fiecare plic conţine o sumă de bani care se exprimă printr-o putere a lui 2. Aflaţi cel mai mic număr de plicuri ce poate fi folosit şi ce sumă de bani în fiecare plic. (Gazeta matematică, seria B)
10. În ce bază are loc inegalitatea 11+22+33>223?
11. Aflaţi x,y,z numere naturale care verifică egalitatea $2^{3x+2}+2^{2y+1}+2^{z}=416$.
12. Numărul A se scrie în baza patru astfel $A=\underbrace{333...3}_{n,ori}$, iar în baza 10 se scrie $A=2^{4020}-1$. Să se afle câte cifre are numărul A în baza 4.

Soluţii probleme propuse

1. Dacă scriem numerele în baza 2 observăm că primul are 46 cifre şi al doilea are 40 cifre $\Rightarrow 2^{46}+2^{36}>2^{40}+2^{23}+2^{10}$; 2. După efectuarea calculelor $2089=AF9_{(16)}$; 3. a) Din teorema împărţirii cu rest $\Rightarrow 80a+8b=199c+114$ divizibil cu $4 \Rightarrow c\in\{2,6\} \Rightarrow$ dacă c=2, atunci $\overline{ab}=64$, dacă c=6 problema nu admite soluţie, atunci $\overline{bca}=426$; b) $2544_{(7)}=963 \Rightarrow$ x=9, y=6, z=3, dar $5^{a+b+c}=25^6$ şi $3^{x+y+z}=27^6$, rezultă $5^{a+b+c}<3^{x+y+z}$; 4. $123_{(x)}=1\cdot x^2+2x+3$ şi $321_{(x)}=3\cdot x^2+2x+1$, de unde $4\cdot x^2+4x+4=228$ şi x=7; 5. Din condiţia dată $N\in\left\{\underbrace{111...1_6}_{m,ori},\underbrace{222...2_6}_{m,ori},...,\underbrace{555...5_6}_{m,ori}\right\}$, folosim faptul că un pătrat perfect poate fi de forma 4k sau 4k+1. Analizăm pe rând toate cazurile posibile şi obţinem $N_1=M_4+3$, $N_2=M_4+2$, $N_3=3\cdot N_1$ divizibil cu 3, dar nu şi cu 9, $N_4=4\cdot N_1$ care nu e p.p. deoarece N_1 nu e p.p. $N_5=M_4+3$; 6. a)$1010001_{(2)}$transformat în baza 10 este egal cu 81, dar şi $1001^2_{(2)}=(1\cdot 2^3+1)^2=9^2=81$, analog pentru celelalte egalităţi, b) $1000010000001_{(2)}=(2^6+1)^2=65^2=25\cdot 169$ divizibil cu 169; 7. $16=10000_{(2)}$ vom calcula restul împărţirii lui 5^{4321} la 16, după efectuarea calculelor $5^{4321}=M_{16}+5$ ultimele cifre vor fi corespunzătoare lui $5=101_{(2)}=0101_{(2)}$; 8. $31_{(x)}=3x+1=5^n$, $175_{(x)}=x^2+7x+5=5^{n+1}$, înmulţind prima realţie cu 5 şi egalând cele două expresii obţinem x=0 sau x=8, din care convine doar x=8; 9. a) $2009=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2^3+1=11111011001_{(2)}$; b) 8 plicuri şi în fiecare plic se află sumele de bani: 1024, 512, 256, 128, 64, 8, 1; 10. Observăm că x>3 şi din scrierea relaţiei în baza x obţinem $4x+3>x^2$, de unde x=4; 11. Se transformă 416 în baza 2 şi obţinem trei cazuri posibile x=2,y=3,z=5, x=2,y=2,z=7,x=1,y=3,z=8; 12. Se trece numărul A din baza 4 în baza 10 şi se obţine $A=3\cdot(4^{n-1}+4^{n-2}+...4+1)=4^n-1 \Rightarrow n=2010$.

Fişă de activitate

1. Determinaţi bazele de numeraţie x_1,x_2,x_3,x_4 din egalitatea: $13_{(x_1)}+35_{(x_2)}+57_{(x_3)}+79_{(x_4)}=156$. (Dâmboviţa, et. locală)
2. Găsiţi x şi y astfel încăt $12_{(x)}+36_{(y)}=34$, unde x şi y reprezintă baze de numeraţie. (Constanţa, et. locală)
3. Să se calculeze $\overline{ab}_{(b+1)}+\overline{ba}_{(a+1)}$, dacă $a,b\leq 3$. (Sibiu, et. locală)
4. Să se determine numărul $\overline{abb}_{(3)}$ pentru care există egalitatea: $2011_{(3)}+\overline{abb}_{(3)}=2210_{(3)}$.
5. Se consideră numărul $N=\overline{ab}_{(4)}+\overline{bc}_{(3)}+\overline{ca}_{(5)}$.

a) Arătaţi că N este par dacă şi numai dacă a=2.

b) Determinaţi a,b,c pentru N=30. (Maramureş, et. judeţeană)

6. Scrieţi în baza 10 numărul $6CD03089_{(16)}$.
7. Să se calculeze folosind tabelul înmulţirii în baza 5 numărul $(314_{(5)})^2$.
8. Să se verifice că:

a) în baza de numeraţie 4, are loc relaţia: $123\cdot 4+10=1111$;

b) în baza de numeraţie 8, are loc relaţia: $1234567\cdot 7+10=11111111$;

9. a) Să se rezolve ecuaţia $\overline{131xy}_{(6)}=3730_{(8)}$, unde indicii reprezintă baze de numeraţie.

b) Dacă numerele 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14 şi 15 sunt scrise în baza zece, atunci să se scrie aceste numere în baza 6.

c) Se consideră şirul crescător al numerelor naturale nenule, din baza zece, care se scriu numai cu cifrele 0,1,2,3,4 şi 5, adică şirul 1,2,3,4,5,10,11,12,13,14,15,20,21,22,23,… . Să se determine al 2008-lea număr din acest şir. (Galaţi, et. judeţeană)

10. Determinaţi numerele naturale x,y,z astfel încât $4^{x+y+1}+4^{y+z+1}+4^{z+x+1}=5376$. (Concursul Mathematica-modus vivendi, Rm. Vâlcea)
11. Să se arte că numărul $N=\overline{\underbrace{111...1}_{n,ori}\underbrace{555...5}_{n,ori}}$ ca produs de două numere naturale consecutive, n număr natural nenul. (Hunedoara, et. judeţeană)
12. Aflaţi ultimele trei cifre ale numărului $N=123456789_{(2001)}$, atunci când se scrie în sistemul zecimal. (Concursul Arhimede)
13. Comparaţi numerele $a=1981^{1980}+1981^{1983}$ şi $b=1981^{1981}+1981^{1982}$.
14. Să se precizeze scrierea în baza 2 a numărului $\overline{abc}$ ştiind că:

a este ultima cifră a lui 2007^{N+2}, unde $N=2+2^2+2^3+\ldots+2^{2007}$;

b este restul împărţirii lui $2006^{2007} + 2007^{2006}$ la 1003;

c este cardinalul mulţimii $M=\{x \in$ □ $/ 2000 < 3^x < 2200 \}$. (Galaţi, et. locală)

15. Se consideră numărul $2^n - 2^{n-1} - 2$, unde $n \in N$ şi $n \geq 3$. Să se scrie acest număr ca o sumă de puteri naturale consecutive ale numărului 2.

16. Un elev a scris următoarea egalitate şi nu a fost corectat de profesor, spre mirarea colegilor săi: 2007=1465. Acestora li s-a dat următoarea explicaţie: cele două numere sunt scrise în baze de numeraţie diferite. Numărul 2007 este scris într-o bază de numeraţie (b) egală cu ultima cifră a numărului N, unde $N=1^{2007} + (1\cdot2)^{2007} + (1\cdot2\cdot3)^{2007} + ...+ (1\cdot2\cdot3....\cdot2007)2007$, iar numărul 1465 este scris într-o bază de numeraţie (c): $2007_{(b)}=1465_{(c)}$.

a) Determinaţi baza de numeraţie (b).

b) Determinaţi baza de numeraţie (c) în care este adevărată egalitatea: $2007_{(b)} =1465_{(c)}$. (Galaţi, et. judeţeană)

17. a) Scrieţi numărul 2006 în baza de numeraţie 2.

b) Opt numere naturale diferite n_1, n_2, n_3, $\dots n_8$ sunt scrise în ordine crescătoare şi verifică egalitatea:

$2^{n_1} + 2^{n_2} + 2^{n_3} + 2^{n_4} + 2^{n_5} + 2^{n_6} + 2^{n_7} + 2^{n_8} = 2006$. Aflaţi cele opt numere. (Giurgiu, et. locală)

18. Să se afle în ce bază de numeraţie avem următoarea egalitate: 111=2+56. (Gazeta matematică, seria B)

19. Să se determine numerele naturale a,b,c ştiind că: $4\cdot(2^{3a}\cdot3^a+ \overline{bb})+2^c=2701$ (Prahova, et. judeţeană)