IV. PROBLEME DE NUMĂRARE

Problemele de numărare ca de exemplu:
numărul divizorilor unui număr,
numărul cifrelor unui număr,
numărul termenilor unui şir,
numărarea elementelor unor mulţimi diverse.

1.Regula sumei

Dacă A şi B sunt două mulţimi fnite disjuncte, atunci $card(A\cup B)=card(A)+card(B)$.

Generalizare: Cardinalul a n mulţimi fnite disjuncte două câte două este suma cardinalelor celor n mulţimi.

Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea lui ,,A sau B'' poate fi realizată în m+n moduri (trebuie avut în vedere că nicio alegere a lui A să nu coincidă cu nicio alegere a lui B). Dacă totuşi există astfel de coincidenţe (în număr de k), atunci regula sumei de mai sus dă ,,m+n-k'' moduri de alegere a lui ,,A sau B''.

3. Principiul includerii şi al excluderii generalizează principiul sumei, în sensul că dă formula de calcul a cardinalului reuniunii a două sau mai multe mulţimi finite, în cazul general.

$card(A\cup B)=card(A) + card(B) - card(A\cap B)$; $card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)-card(A\cap B)-card(A\cap C)-card(B\cap C) + card(A\cap B\cap C)$.

2. Regula produsului.

Dacă un obiect A se poate alege în ,,m'' moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în ,,n'' moduri, atunci alegerea perechii (A , B) în acestă ordine poate fi realizată în ,,m·n'' moduri.

Cardinalul produsului cartezian a n mulţimi finite este produsul cardinalelor celor trei mulţimi.

3. Numărul divizorilor unui număr natural

Numărul divizorilor numărului $a = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$ *este egal cu* $(k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_n + 1)$.

4. Numărul submulţimilor unei mulţimi.

Dacă M este o mulţime cu m elemente, atunci ea are 2^m *submulţimi.*

Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci numărul submulţimilor cu k elemente este $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$

Exemple:

1. Un număr natural se numeşte palindrom dacă el coincide cu răsturnatul său (exemplu 525 sau 41714). Câte numere palindrom de 5 cifre există?

<u>*Rezolvare:*</u> *Evident, e suficient să alegem primele 3 cifre (celelalte coincid cu a doua, respectiv cu prima). Alegerea se poate face în 9 moduri pentru prima cifră (fără 0), apoi în câte 10 moduri pentru următoarele două. Cu regula produsului obtinem* $9\cdot 10\cdot 10=900$ *numere.*

2. Câte numere de 5 cifre au suma dintre prima şi ultima cifră egală cu 5?

<u>*Rezolvare:*</u> *Un astfel de număr este de forma* $\overline{abcde}$ *şi din a+e=5 deducem că perechea (a,e) poate din lua una din valorile (1,4),(2,3),(4,1),(5,0); în rest, fiecare din celelalte 3 cifre pot fi alese în câte 10 moduri. Folosind regula produsului, obţinem* $4\cdot 10^3$ *numere.*

3. Determinaţi numărul divizorilor lui 360.

<u>*Rezolvare:*</u> $360= 2^3\cdot 3^2\cdot 5$. *Rezultă* $(3+1)(2+1)(1+1)=24$ *divizori.*

4. Fie A={1,2,3,4}. Stabiliţi câte submulţimi are A. Precizaţi aceste submulţimi.

<u>*Rezolvare:*</u> *A are 4 elemente* $\Rightarrow$ *A are* $2^4=16$ *submulţimi.*

$A_1=\{1\}$; $A_2=\{2\}$; $A_3=\{3\}$; $A_4=\{4\}$; $A_5=\{1,2\}$; $A_6=\{1,3\}$; $A_7=\{1,4\}$; $A_8=\{2,3\}$; $A_9=\{2,4\}$; $A_{10}=\{3,4\}$; $A_{11}=\{1,2,3\}$; $A_{12}=\{1,2,4\}$; $A_{13}=\{1,3,4\}$; $A_{14}=\{2,3,4\}$; $A_{15}=\{1,2,3,4\}$; $A_{16}=\varnothing$.

5. Fie A={1,2,3,4}. Câte submulţimi de trei elemente are A?

Rezolvare: A are 4 elemente, atunci numărul submulţimilor cu 3 elemente este $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}=4$

Probleme rezolvate

1. Câţi divizori are numărul $2^{10} \cdot 5^9 + 2 \cdot 5^8$, în mulţimea numerelor naturale.
Rezolvare:
Numărul dat se poate scrie $2^9 \cdot 5^8 \cdot 11$. Rezultă că acesta are (9+1)(8+1)(1+1)=180 divizori.
2. Determinaţi toate numerele de forma $a = 2^m \cdot 3^n$, unde m şi n sunt numere naturale care au exact 8 divizori.
Rezolvare:
(m+1)(n+1)=8 de unde rezultă numerele 3^7, 54, 24, 2^7.
3. Să se determine toate numerele scrise în baza 10 care sunt divizibile cu 15 şi au 14 divizori.
Rezolvare:
$15|A \Rightarrow A = 3^x \cdot 5^y \cdot p^{k_1} \cdot p^{k_2}$ ….. ; x, $y \neq 0$. Numărul divizorilor lui A este $n=(x+1)(y+1)(k_1+1)(k_2+1)\ldots$ Cum $x+1 \neq 1$ si $y+1 \neq 1 \Rightarrow x+1=2$ şi y+1=7 sau x+1=7 şi y+1=2. Deci x=1 şi y=6 sau x=6 şi y=1. Numerele care satisfac condiţia problemei sunt $A = 3 \cdot 5^6$ sau $A = 3^6 \cdot 5$.
4. Aflaţi două numere naturale de trei cifre în baza 10, ştiind că sunt multiplii consecutivi 13 şi că suma celor două numere are exact 9 divizori. (Iaşi, et. judeţeană)
Rezolvare:
Fie a=13n şi $b=13(n+1) \Rightarrow a+b=13(2n+1)=13^k \cdot p^q$, p număr prim şi $(k+1)(q+1)=9 \Rightarrow (k,q) \in \{(8,0),(2,2)\} \Rightarrow$ k=q=2, de unde a=754 şi b=767.
5. Toate numerele naturale care încep cu cifra 2 sunt scrise în ordine crescătoare. Astfel se obţine următorul şir de cifre 220212223242526.... Aflaţi ce cifră stă pe locul 2010. (Vaslui, et. locală)
Rezolvare:
Numărăm cifrele 2 – 0 cifră, 202122...29 – 10·2=20 cifre, 200201202...299 – 100·3=300 cifre, 20002001...2099 – 1000·4=4000 cifre, deci pe locul 2010 este o cifră a unui număr de 4 cifre. 2010 – (1+20+300)=1689, 1689:4=422, $r=1 \Rightarrow$ cifra căutată este 2.
6. Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror trei numere alăturate este cel mult 19, iar suma oricăror 4 numere alăturate este cel puţin 25. Să se detremine suma celor 11 numere. (Gazeta matematică, seria B)
Rezolvare:
Fie $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{11}$ cele 11 numere, din prima condiţie rezultă $a_1+a_2+a_3 \leq 19$, $a_2+a_3+a_4 \leq 19$, ..., $a_{11}+a_1+a_2 \leq 19$ de unde prin adunare şi împărţire la 3 rezultă că $S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11} \leq 209:3=69$, r=2. Analog din a doua condiţie rezultă că $S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11} \leq 275:4=68$, r=3, deci S=69.
7. Un album de artă are paginile numerotate de la 1 la 100. Pe fiecare pagină care este multiplu de 2, dar nu şi de 5 sunt câte 2 desene. Pe paginile care sunt multipli de 5, dar nu şi de 2 sunt 3 desene. În rest, paginile sunt ocupate cu texte explicative.
a) Câte pagini sunt ocupate de text?
b) Câte desene apar în album? (Gorj, et. locală)
Rezolvare:
a) Numărul multiplilor de 2, pentru paginile din album, este 50, numărul multiplilor de 5, pentru paginile din album, este 20, numărul multiplilor de 10, pentru paginile din album, este 10, atunci 100−(50−10+20−10)=100−50=50 pagini ocupate de text , b) Numărul multiplilor de 2, dar nu şi de 5, este 40, deci $40 \cdot 2 = 80$

desene, numărul multiplilor de 5, dar nu şi de 2 este 10, deci $10 \cdot 3 = 30$ desene. În total avem 80+30=110 desene.

8. Într-o urnă sunt 50 de bile albe, negre şi roşii. Oricum am extrage 42 bile din urnă, vom găsi o bilă neagră. Oricum am extrage 26 bile din urnă , vom găsi o bilă albă. Oricum am lăsa în urnă 15 bile, printre cele extrase vom avea o bilă roşie. Câte bile de fiecare culoare sunt în urnă? Justificaţi răspunsul. (Călăraşi, et. locală)

Rezolvare:

Notăm cu a numărul bilelor albe, cu r al celor roşii şi cu n al celor negre, din condiţiile puse obţinem relaţiile $a+r+1=42$, $n+r+1=26$, $n+a+1=35 \Rightarrow a=41-r$, $n+41-r=34 \Rightarrow r=n+7 \Rightarrow n+n+7+1=26 \Rightarrow n=9$, $a=25$, $r=16$.

9. Spunem că numărul natural a este "fratele" numărului natural b dacă $a \neq b$ şi numărul a se obţine din rearanjarea cifrelor numărului b. De exemplu, 2011 este fratele lui 1210.

a). Câţi fraţi are numărul $10^{2011}-2$?

b). Dar numărul $10^{2011}-12$? (Galaţi, et. locală)

Rezolvare:

a) $10^{2011}-2=1\underbrace{00...0}_{2011\text{ cifre}}-2=\underbrace{99....9}_{2010\text{ cifre}}8$, „fraţii" numărului se obţin prin schimbarea poziţiei cifrei 8, deci vom avea 2010 „fraţi", b) $10^{2011}-12=1\underbrace{00...0}_{2011\text{ cifre}}-12=\underbrace{99....9}_{2009\text{ cifre}}88$, fie $x_1=\underbrace{99....9}_{2009\text{ cifre}}88$, $x_2=\underbrace{99....9}_{2008\text{ cifre}}889$, $x_3=\underbrace{99....9}_{2007\text{ cifre}}8899$,..., $x_{2009}=988\underbrace{99....9}_{2008\text{ cifre}}$, $x_{2010}=88\underbrace{99....9}_{2009\text{ cifre}}$, în total avem 1+2+3+....+2008+2009+2009=2021054.

10. Se consideră mulţimea $M=\left\{2^a \cdot 3^b \mid a,b \in \mathbb{N},\ a \le 100, b \le 100\right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii M.

b) Să se demonstreze că orice submulţime A a mulţimii M, cu 5 elemente conţine cel puţin două elemente distincte a căror produs este pătrat perfect. (Hunedoara, et. judeţeană)

Rezolvare:

a) numerele a şi b pot lua câte 101 valori, deci card(M)=$101 \cdot 101$=10201, b) putem avea (a,b) $\in \left\{(M_2, M_2);(M_2, M_{2+1});(M_{2+1}, M_2);(M_{2+1}, M_{2+1})\right\}$, în total patru combinaţii după paritatea numerelor a şi b. Dacă alegem cinci elemente ale lui M, două vor avea exponenţii de acelaşi tip, iar produsul lor va avea ambii exponenţi pari, deci va fi pătrat perfect.

Probleme propuse

1. Fie numărul natural obţinut prin scrierea alăturată a numerelor naturale de la 1 la 80.

a) Determinaţi câte cifre are acest număr.

b) Stabiliţi care este cifra de pe poziţia 100 (de la stânga).

c) Cum se elimină 40 de cifre din număr astfel încât numărul obţinut să fie cât mai mare posibil? (Arad, et. locală)

2. Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 2008. Elevii Andrei şi Matei şterg pe rând, începând cu Andrei, câte un număr. Pierde elevul care este obligat să şteargă primul un multiplu al lui 3 sau un multiplu al lui 7. Care elev câstigă, Andrei sau Matei? Justificaţi răspunsul. (Galaţi, et. locală)

3. Se consideră numărul natural n = 36912151821….2004 .

a) Câte cifre are numărul natural n?

b) Care este a 2004-a cifră a numărului n?

c) De câte ori apar două zerouri consecutive (exact două) în scrierea numărului n? (Galaţi, et. judeţeană)

4. Să se determine câte numere (scrise în baza 10) de câte 4 cifre se pot forma, folosind numai cifrele 0, 2, 4 şi 6.
5. Fie S suma divizorilor naturali ai numărului 2001. Să se arate că 5S este un număr natural pătrat perfect.
6. Câte numere pare sunt cuprinse între 2^{1000} şi 2^{2000}?
7. Să se afle câte numere de forma $\overline{abcabc}$, scrise în baza 10, sunt divizibile cu 847. (Mehedinţi, et. judeţeană)
8. Elevii unei clase joacă fotbal sau baschet: 19 joacă fotbal, 24 joacă baschet şi 16 practică ambele jocuri. Câţi elevi sunt în clasă?
9. Aflaţi câte numere naturale mai mici sau egale cu 500 nu sunt divizibile cu 2, 3 sau 5.
10. Scriem pe un cerc toate numerele de la 0 la 2005. Începând cu 0, tăiem toţi multiplii de 2, apoi toţi multiplii de 3, apoi toţi multiplii de 5. Câte numere rămân netăiate?

Soluţii probleme propuse

1. a) De la 1 la 9 avem 9 cifre, de la 10 la 80 avem $(80-10+1)\cdot 2=142$ cifre, deci în total 151 cifre, b) de la 1 la 54 avem 99 cifre, deci cifra de pe locul 100 este 5, c) numărul cerut este 996272829...787980; 2. De la 1 la 2008 sunt 699 de numere divizibile cu 3 ($3=3\times 1$, $6=3\times 2$,...., $2007=3\times 669$), 286 de numere divizibile cu 7 ($7=7\times 1$, $14=7\times 2$,...,$7\times 286=2002$), şi 95 de numere divizibile cu 21 ($21=21\times 1$, $42=21\times 2$,..., $21\times 95=1995$), deci de la 1 la 2008 sunt $669+286-95=860$ de numere care se divid cu 3 sau cu 7. Deci, pe tablă sunt $2008-860=1148$ numere care nu se divid cu 3 sau 7, adică avem un număr par de numere care pot fi şterse fără a pierde jocul. Rezultă că jocul este pierdut de primul elev care şterge un număr, adică Andrei; 3. De la 10 la 99 sunt 90 de numere dintre care 30 se divid cu 3. a) De la 100 la 999 sunt 900 de numere dintre care 300 se divid cu 3. De la 1000 la 2004 sunt 1005 numere dintre care 335 se divid cu 3. Prin urmare numărul n are $3\cdot 1 + 30\cdot 2 + 300\cdot 3 + 333\cdot 4 = 3 + 60 + 900 + 1340 = 2303$ cifre**.** b) Până la 1000 sunt 333 numere care se divid cu 3 şi care se scriu cu 963 cifre. Înseamnă că $2004-963 = 1041$ cifre (până la a 2004-a cifră) provin din numere de 4 cifre. $1041:4 = 260$ rest 1. Deci, a 2004-a cifră este prima cifră a celui de-al 261-lea număr de 4 cifre divizibil cu 3.1002=3 . 334, 1005 = 3 . 335, … ,1779 = 3 . 593, 1782 = 3 . 594, a 2004 -a cifră va fi 1, c) Două zerouri consecutive se pot obţine de la numere de tipul $\overline{X00}$, $\overline{100X}$, $\overline{1X00}$, 2 001 şi 2004 care se divid cu 3. Analizând toate cazurile posibile obţinem: 300, 600, 900, 1002, 1005, 1008, 1200, 1500, 1800, 2001, 2004. Înseamnă că vor apărea de 11 ori câte 2 zerouri consecutive; 4. Un astfel de număr este de forma $\overline{abcd}$, pentru cifra a avem 3 posibilităţi de alegere: 2, 4 şi 6 iar pentru oricare din celelalte 3 cifre avem câte 4 posibilităţi de alegere. Folosind regula produsului, obţinem $3\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 192$ de numere; 5. $2001 = 3\cdot 23\cdot 29$ de unde suma divizorilor S= $\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{23^2-1}{23-1}\cdot\frac{29^2-1}{29-1}=4\cdot 24\cdot 30\Rightarrow 5S=120^2$; 6. Observăm că $2^{1000} = 2^{1000}$, $2^{1000}+ 2 = 2^{1000} + 2\cdot 1$, $2^{1000}+ 4 = 2^{1000}+ 2\cdot 2$, …, $2^{2000} = 2^{1000}+2\cdot x \Rightarrow 2\cdot x= 2^{2000}-2^{1000} \Rightarrow x= 2^{1999}-2^{999} \Rightarrow x = 2^{999}(2^{1000}-1)$. Indicele de numărare ia valori de la 0 la $2^{999}(2^{1000}-1)$. Prin urmare sunt $2^{1999}-2^{999}+1$ numere pare; 7. $\overline{abcabc}=\overline{abc}\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, dar $847=7\cdot 11^2\Rightarrow \overline{abc}$ trebuie să fie divizibil cu $11\Rightarrow \overline{abc}\in\{110,121,...,990\}$, deci vor fi 81 de numere; 8. Aplicăm principiul includerii şi excluderii: Card $(F\cup B)$= card(F)+card(B)−card$(F\cap B)$=19+24-16=27, deci numărul elevilor din clasă este 27; 9. Fie A mulţimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care sunt divizibile cu 2, B mulţimea celor divizibile cu 3 şi C mulţimea numerelor divizibile cu 5$\Rightarrow$card(A)=500:2=250, card(B)=500:3, deci considerând partea întreagă$\Rightarrow$166, card(C)=500:5=100, card$(A\cap B)$=500:6$\Rightarrow$83 , card$(B\cap C)$=500:15$\Rightarrow$ 33 , card$(A\cap C)$ = 500:10=50, card$(A\cap B\cap C)$=500:30$\Rightarrow$16, deci card$(A\cup B\cup C)$=250+166+100−83−33−50+16=366, deci numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care nu sunt divizibile cu 2, nici cu 3, nici cu 5 este 500−366=134; 10. Notăm cu A mulţimea multiplilor de 2, cu B mulţimea multiplilor de 3, respectiv cu C mulţimea multiplilor de 5. Card(A)=1003, Card(B)=669, Card(C)= 402, Card$(A\cap B)$

=335, Card$(A\cap C)$ =201, Card$(B\cap C)$ =134, Card$(A\cap B\cap C)$ =67, Card$(A\cup B\cup C)$ =1003 + 669 + 402 − 335 − 201 − 134 + 67= 1471. Rămân netăiate 2006 −1471=535 numere.

Fişă de activitate

1. Găsiţi numărul $\overline{ab}$, scris în baza 10, astfel încât numărul $\overline{abab}$ să aibă cel mai mic număr de divizori. (Botoşani, et. locală)

2. a) Câte cifre sunt necesare pentru a pagina o carte care are 275 de pagini?

b) Câte pagini are o carte pentru paginarea căreia s-au folosit 2980 cifre?

3. Câte numere naturale de 5 cifre diferite se pot scrie în sistemul zecimal, ştiind că prima cifră nu poate fi 0?

4. Fie numărul 123456789101112…..2010.

a) Câte cifre are numărul dat ?

b) De câte ori a fost folosită cifra 2 în scrierea acestui număr ?

5. Aflaţi câte numere de trei cifre se divid cu 5.

6. Un număr se numeşte "pretenţios" dacă are forma $\overline{abc}$ şi b=a : c

a) Care este suma dintre cel mai mic şi cel mai mare număr "pretenţios".

b) Câte numere "pretenţioase" sunt? (Bacău, et. locală)

7. Aflaţi câte numere naturale îndeplinesc simultan condiţiile:

a) fiecare număr are 6 cifre;

b) suma cifrelor fiecărui număr este 9;

c) patru dintre cifrele fiecărui număr sunt 2; 0; 0; 4. (Braşov, et. judeţeană)

8. Numărul natural n are 2 divizori d_1 şi d_2. Se ştie că $d_1+d_2=37$. Să se afle n. Aceeaşi întrebare dacă $d_1+d_2=38$. Explicaţi răspunsul. Cum trebuie să fie suma d_1+d_2 pentru ca problema să aibă soluţii? (Gazeta matematică, seria B)

9. Se dă mulţimea A = {2, 4, 6, …, 2004, 2006}.

a) Găsiţi toate submulţimile mulţimii A formate care conțin două elemente și suma acestor elemente este egală cu 4000.

b) Aflaţi numărul submulţimilor mulţimii A formate care conțin două elemente și suma acestor elemente este egală cu 2008.

c) Aflaţi numărul submulţimilor mulţimii A care conțin patru elemente și suma acestor elemente este egală cu 4016. (Galaţi, et. judeţeană)

10. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,....,11,12\}$. Aflaţi numărul submulţimilor lui A ştiind că produsul elementelor fiecăreia este cel mult egal cu 12.

11. Fie şirul 1, 2, 3, ..., 299, 300. Transformăm acest şir astfel: primii trei termeni rămân neschimbaţi, următorii trei termeni se înlocuiesc cu numărul 3, următorii trei termeni rămân neschimbaţi, următorii trei termeni se înlocuiesc iar cu numărul 3 şi aşa mai departe.
a) Aflaţi câţi termeni din noul şir sunt egali cu 3.
b) Calculaţi suma termenilor din noul şir. (Constanţa, et. locală)
12. Se consideră mulţimea M=$\{x^4 \mid x \in \{1,2,3,...,10\}\}$ determinaţi numărul minim de elemente care trebuie alese arbitrar din M pentru a fi siguri că există două elemente alese având diferenţa divizibilă cu 10. (Gazeta matematică, seria B)
13. O pereche de numere naturale (x;y) se numeşte „interesantă" dacă, atunci când calculăm suma x + y nu au loc treceri peste ordin. De exemplu, perechea (24; 43) este „interesantă". Să se calculeze numărul perechilor „interesante" cu suma 43296. (Gorj, et. locală)
14. Se dă şirul de mulţimi . $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{5,6,7,8,9\}$, ...
a) Scrieţi elementele mulţimii A_4 .
b) Determinaţi mulţimea ce conţine numărul natural 2012.
c) Determinaţi cel mai mic şi respectiv cel mai mare element al mulţimii A_{2012}. (Ialomiţa, et. locală)
15. Se consideră numere naturale consecutive. Suma resturilor celor numere la 7 este 156. Aflaţi toate valorile posibile ale lui n. (Gazeta matematică, seria B)