

III. ȘIRURI. SUME

Stabilirea numărului termenilor unui șir, determinarea formei generale sau a regulii de formare a termenilor unui șir, aflarea sumei primilor n termeni dintr-un șir, determinarea termenului de pe locul n dintr-un șir.

Fiind dat șirul a_1, a_2, a_3, \dots să se completeze cu încă p termeni, $p \in \mathbb{N}^$.*

Să se completeze cu încă trei termeni următoarele șiruri:

1) 1, 2, 3, ... Numerele din șir sunt consecutive. Șirul se completează cu 4, 5, 6.

2) 2, 4, 6, ... Numerele din șir sunt pare, consecutive. Șirul se completează cu 8, 10, 12.

3) 3, 5, 7, ... Numerele din șir sunt impare consecutive. Șirul se completează cu 9, 11, 13.

4) 5, 8, 11, ... Numerele din șir se formează după regula $a_n = a_{n-1} + 3$ unde $n \in \mathbb{N}^*$. Șirul se completează cu 14, 17, 20

5) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Numerele din șir se formează după regula $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ unde, $n \in \mathbb{N}^*$. Șirul se completează cu 13, 21, 34.

Calculul unor sume importante :

a) $1+2+3+\dots+n = n(n+1):2$ formula lui Gauss

b) Pentru a calcula suma primelor n numere impare, putem proceda astfel :

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = (2 \cdot 0+1) + (2 \cdot 1+1) + \dots + [2 \cdot (n-1)+1] =$$

$$= n + 2 \cdot [0+1+2+\dots+(n-1)] = n + 2 \cdot (n-1) \cdot n : 2 =$$

$$= n + (n-1) \cdot n = n \cdot [1 + (n-1)] = n^2$$

c) Pentru a calcula suma puterilor lui 2:

$$S = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n \text{ înmulțim cu 2 și obținem}$$

$$2S = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + 2^{n+1} - 2^0 \Rightarrow 2S = S + 2^{n+1} - 1$$

Probleme rezolvate

- Determinați forma generală a termenilor șirului: 1, 2, 6, 24, 120, ...

Rezolvare:

Observăm că $a_1=1$, $a_2=1 \cdot 2=2$, $a_3=1 \cdot 2 \cdot 3=6$, $a_4=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$, deci termenul general $a_n=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ cu $n \geq 1$. Acest produs $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ se numește n factorial și se notează cu $n!$, deci $a_n=n!$

- Stabiliți regula de formare a șirului: 61, 52, 63, ... și scrieți următorii trei termeni.

Rezolvare:

Se observă că 61 este inversul lui $16=4^2$, 52 este inversul lui $25=5^2$, deci regula de formare a șirului este inversul pătratului perfect. Următorii trei termeni sunt 94, 46, 18.

- Fie șirul de numere naturale: 1, 5, 9, 13, ...

a) Completați șirul cu încă trei termeni.

b) Găsiți al 155-lea, al 378-lea, al 2003-lea număr.

c) Justificați care dintre următoarele numere fac parte din șir: 497, 531, 794, 1073.

Precizați locul în șir, dacă e cazul.

d) Calculați suma primilor 20 termeni.

Rezolvare:

a) Următorii 3 termeni sunt $13+4=17$, $17+4=21$, $21+4=25$.

b) Termenii din șir au forma $a_n = 4 \cdot (n-1) + 1$, $n \in \mathbb{N}$ ($4 \cdot 0 + 1$, $4 \cdot 1 + 1$, $4 \cdot 2 + 1$, ...).

Al 155-lea termen este $4 \cdot 154 + 1 = 617$. Al 378-lea termen este $4 \cdot 377 + 1 = 1509$.

Al 2003-

lea termen este

$$4 \cdot 2002 + 1 = 8009.$$

c) $497 = 4 \cdot 124 + 1 \Rightarrow 497$ face parte din șir este al 125-lea termen.

$531=4 \cdot 132+3 \Rightarrow 531$ nu face parte din șir.

$794=4 \cdot 198+2 \Rightarrow 794$ nu face parte din șir.

$1073=4 \cdot 268+1 \Rightarrow 1073$ face parte din șir; este al 269-lea termen.

d) Primii 20 de termeni sunt $4 \cdot 0+1, 4 \cdot 1+1, 4 \cdot 2+1, \dots, 4 \cdot 19+1$. Deci

scriem

$S=1+5+\dots+77$ și $S=77+73+\dots+1$.

Adunând membru cu membru $2S=78 \times$ numărul de termeni ai șirului. Pentru a calcula numărul de termeni ai șirului efectuăm $(77-1):4$ („pasul sumei”) + 1 $2S=78 \cdot 20$, deci $S=78 \cdot 10=780$.

• Fie numărul $A=1234567891011121314\dots20022003$.

a) Aflați câte cifre are numărul A .

b) Care este a 2000-a cifră a numărului A ?

Rezolvare:

a) Sunt 9 numere de o cifră, $99 - 10 + 1=90$ numere de 2 cifre, $999 - 100 + 1=900$ numere de 3 cifre și

$2003 - 1000 + 1=1004$ numere de 4 cifre. În total sunt $9+90 \cdot 2+900 \cdot 3+1004 \cdot 4=6905$ cifre.

b) Pentru scrierea numerelor de o cifră și 2 cifre se folosesc 189 cifre. Rămân $2000 - 189=1811$ cifre

pentru a scrie numere de 3 cifre. Dar, $1811=3 \cdot 603+2$, rezultă că a 2000-a cifră este a 2-a cifră a celui

de al 604-lea număr natural de 3 cifre, adică a 2-a cifră a lui 703, deci 0.

• Se consideră șirul de numere: 2; 7; 12; 17; 22;

a) Aflați al 501-lea termen al șirului.

b) Stabiliți dacă numărul 2007 este termen al șirului.

c) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului. (Argeș, et. locală)

Rezolvare:

a) Observăm că $a_2=2+5, a_3=2+2 \cdot 5, \dots, a_n=2+5 \cdot (n-1)$. Pentru $n=501, a_{501}=2502$.

b) Numărul 2007 este un termen al șirului dacă există un număr natural n astfel încât $2007=2+5 \cdot (n-1)$. Din calcule rezultă $n=402$, deci 2007 este termen al șirului.

c) Suma primilor 100 de termeni ai șirului este $S=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{100}=2+2+5+2+2 \cdot 5+\dots+2+5 \cdot (n-1)=2 \cdot 100+5 \cdot (1+2+3+\dots+99)=5150$.

• Să se determine numerele de forma $a, a0$, știind că aceste numere verifică egalitatea:

$3+6+9+\dots+=.$ (Galați, et. județeană)

Rezolvare:

Se observă că numărul $= 3x$, unde x număr natural nenul. Egalitatea dată devine:

$3+6+9+\dots 3 \cdot x = 3 \cdot x \cdot 1000 3(1+2+3+\dots+x) = 3 \cdot x \cdot 1000 1+2+3+\dots+x = x \cdot 1000x(x+1) = 2000 \cdot x$, dar $x0$, atunci $x=1999=5997$

• Determinați numerele naturale nenule a și n , știind că a este număr prim și $a^{2n} - 4=3 \cdot (4 + 4^2 + \dots + 4^{1999})$. (Argeș, et. județeană)

Rezolvare:

Notăm $S=4+4^2+\dots+4^{1999}, S=4^2 + 4^3+\dots+ 4^{1999} + 4^{2000}, S+4 - 4^{2000}=SS=(4^{2000} - 4):3a^{2n} - 4 = 3 \cdot (4^{2000} - 4):3 a^{2n}=2^{4000} a=2$, deoarece a număr prim.

• Se dă numărul natural: $x=1+2+2 \cdot 3 \cdot 4+3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6+4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8+\dots$

a) Precizați termenul de rang 10.

b) Stabiliți dacă numărul natural x este pătrat perfect.

Rezolvare:

a) Observăm că termenul de rang n, n^2 este un produs de n factori consecutivi, cel mic dintre aceștia fiind $n-1$. Al 10-lea termen va fi $9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18$

b) Ultima cifră a termenilor, începând cu al 4-lea, este 0, deoarece în produsul factorilor apar factori de 5 și de 2. $U(x)=U(1+2+2 \cdot 3 \cdot 4)=7$, deci x nu poate fi pătrat perfect.

- Știind că $1^2+2^2+3^2+\dots+49^2+50^2=a$, calculați, în funcție de a, următorul număr: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+99\cdot 100+100\cdot 101$. (Gazeta matematică, seria B)

Rezolvare:

$S=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+99\cdot 100+100\cdot 101$ are 100 de termeni pe care-i adunăm doi câte doi și obținem $1\cdot 2+2\cdot 3=2\cdot 2^2$, $3\cdot 4+5\cdot 6=2\cdot 4^2$, ..., $99\cdot 100+100\cdot 101=2\cdot 100^2$, deci suma este egală cu $8a$.

• Fie numerele: $x = 2011 + 2\cdot(1 + 2 + 3 + \dots + 2010)$ și $y = 1 + 3 + 5 + \dots + 2011$.
• Să se arate că numerele x și y sunt pătrate perfecte
• Să se arate că: $2011 + x < 4y$. (Botoșani, et. locală)

Rezolvare:

a) Aplicăm formula lui Gauss și $x = 2011+2\cdot(2011\cdot 2010):2 = 2011^2$, $y=2012\cdot 1006:2 = 1006^2$.

b) $2011 + x < 4y$, $2011 + 2011^2 < 4 \cdot 1006^2$ $2011 \cdot 2012 < 2012^2$

- Se consideră următorul tablou în care linia n conține n numere:

1				
•	3			
4	5	6		
7	8	9	10	

-
- a) Calculați suma numerelor din primele 5 linii ale tabloului.
 b) Determinați primul element de pe linia 100. (Sibiu, et. locală)

Rezolvare:

- a) Observăm că elementele liniei a 5-a sunt: 11, 12, 13, 14, 15 și $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 15 =$
 b) Urmărind ultimul număr al fiecărei linii se observăm că prima linie se termină în 1, a doua linie în $3 = 1 + 2$, a treia linie în $6=1+2+3$ a n -a linie se va termina cu numărul n , a 99-a linie se va termina cu numărul n , deci primul element al liniei 100 este 4951.

Probleme propuse

- Câți termeni trebuie să aibă suma $1+2+3+\dots+n$ pentru a obține, ca rezultat, un număr format din trei cifre identice. (Brașov, et. județeană)
- Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor și justificați:
 - a) $S=1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\dots+1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot 2008$ are ultima cifră egală cu 3.
 - b) $1+3+5+7+\dots+2007 < 2+4+6+\dots+2008$ (Satu Mare, et. județeană)
- Se dă șirul finit de numere naturale: 1,2,4,5,6,8,9,10,12,....,2009,2010,2012.
 - a) Justificați că numărul 1111 nu se află printre termenii șirului.
 - b) Stabiliți câți termeni are șirul dat.
 - c) Arătați că suma tuturor termenilor șirului este divizibilă cu 503. (Vâlcea, et. locală)
- Toate numerele naturale care încep cu cifra 2 sunt scrise în ordine crescătoare. Astfel se obține următorul sir de cifre: 2 20 21 22 23 24 25 26 Aflati ce cifră stă pe locul 2010? (Vaslui, et. locală)
 - a) Arătați că numărul $2011 \cdot 2010 + 2011$ $2011 \cdot 2010 + 2011$ $2011 \cdot 2010 + 2011$ $2011 \cdot 2010 + 2011$ e pătrat perfect.
 - b) Aflați restul împărțirii numărului $2011^2 \cdot 2011^2$ 2011^2 la 2010.
 - c) Arătați că suma primelor 2011 numere naturale impare este egală cu 2011^2 .
 - d) Scrieți numărul $2011^2 \cdot 2011^2$ 2011^2 ca o sumă de 2011 numere naturale consecutive. (Brașov, et. locală)
- Se consideră tabloul:

2 3
4 5 6
7 8 9 10
.....

- Cu ce număr începe al 100-lea rând?
- Care este suma numerelor din rândul 100?
- În al câtelea rând se află numărul 100?
- Se consideră șirul de numere naturale: 1,5,9,13,17,....
- a) Să se afle al 2005-lea termen al șirului.
- b) Să se afle dacă numărul 2005 este termen al șirului.
- c) să se arate că suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 2005 dau câtul 5 este un număr divizibil cu 5. (Concursul Arhimede)
- Se consideră șirul de numere naturale: 4,7,10,13,16,....
- a) Calculați diferența dintre al 2011-lea termen al șirului și al 201-lea termen al șirului.
- b) Calculați suma primilor 2011 termeni ai șirului divizibili cu 5. (Olt, et. locală)
- Fie numerele: $p_1=1$, $p_2=2 \cdot 3$, $p_3=4 \cdot 5 \cdot 6$,... și suma $S = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{2011}$.
- a) Determinați restul împărțirii sumei S la 6.
- b) Aflați cu ce număr începe și cu ce număr se termină produsul p_{100} . (Cluj, et. locală)
- Fie șirul de numere $a_n = 2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$.
- a) Precizați dacă numerele 1, 2, 5, 12, 27, 58 sunt termeni ai șirului.
- b) Calculați suma primilor 20 de termeni ai șirului. (Mureș, et. locală)
- Arătați că numărul poate fi scris ca suma pătratelor a o sută de numere naturale. (Satu Mare, et. locală)

Soluții probleme propuse

1. Din formula lui Gauss obținem $n(n+1):2 = n(n+1)=6a \cdot 37a=6$, $n=36$; 2. a) Ultima cifră a termenilor, începând cu al 5-lea, este 0, deoarece produsul conține cel puțin un multiplu de 5 și un multiplu de 2, $U(S)=U(1+1 \cdot 2+1 \cdot 2 \cdot 3+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)=3$, b) calculăm cele două sume $1+3+5+7+\dots+2007=2007^2$ și $2+4+6+\dots+2008=1004 \cdot 1005$; 3. a) Observăm că termenii care lipsesc din șir sunt de forma $4k+3$. Numărul $1111=4 \cdot 277+3$, b) sunt 1509 numere; c) 1000 se află pe locul 750; d) $S=503 \cdot 3019$; 4. Vom scrie numerele care formează șirul dat într-un tabel ce ne permite să numărăm mai ușor cifrele:

Deci cifra de pe locul 2010 este una din cifrele numerelor de patru cifre.

Obținem astfel că cifra căutată este prima cifră a unui număr de forma ; 5. a) $2011 \cdot 2010 + 2011 = 2011^2$; b) $2011^2 = 2010 \cdot 2012 + 1$, deci restul este 1; c) notăm $S_1 = 1+3+5+\dots+4021$, $S_2 = 1+2+3+\dots+4021 + 4022$, $S_3 = 2+4+6+\dots+4022$. Observăm că $S_1 = S_2 - S_3 = 2011^2$; d) $2011^2 = a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+2010)$, din calcule rezultă $a=1006$; 6. a) Ultimul număr al fiecărei linii: 1; 3=1+2; 6=(1+2)+3; 10=(1+2+3)+4 etc. Linia n: Al 100-lea rând începe cu 4051; b) Rândul 100 se termină cu 5050.
 $S = 4951+4952+\dots+5050 = (4950+1)+(4950+2)+\dots+(4950+100) = 500050$; c) $<100 <$ Numărul 100 se află pe a 14-a linie; 7. a) observăm că $a_1=1+0 \cdot 4$, $a_2=1+1 \cdot 4$, $a_3=1+2 \cdot 4$, $a_{2005}=1+2004 \cdot 4=8017$; b) $a_k=4k+1$, $4k+1=2005k=501$, deci 2005 este termen al șirului; c) $n=2005 \cdot 5+r$, $rS=2005 \cdot 5+0+2005 \cdot 5+1+2005 \cdot 5+3+\dots+2005 \cdot 5+2004=2005 \cdot 11027$; 8. a) $a_1=3 \cdot 1+1$, $a_2=3 \cdot 2 +1$, $a_3=3 \cdot 3 +1$, ..., $a_k=3 \cdot k +1$, $k \in \mathbb{N}$, $a_{2011} - a_{201} = 5430$; b) $S = a_3+a_8+a_{13}+\dots+a_{10053} = 30335935$; 9. a) $S=6k+1$ și restul împărțirii lui S la 6 este 1; b) cel mai mare factor din p_{100} este egal cu $1+2+3+\dots+100=5050$ și cel mai mic factor din p_{100} este

egal cu $1+2+3+\dots+99+1=4951$; 10. a) observăm că $a_1=2^1-1=1$, $a_2=2^2-2=2$, $a_3=2^3-3=5$, $a_4=2^4-4=12$, $a_5=2^5-5=27$, $a_6=2^6-6=58$; b) se aplică formulele cunoscute; 11. $k(k+1) = k^2 + k$ și înlocuind în B, obținem $B = (1^2 + 2^2 + \dots + 100^2) + (1 + 2 + \dots + 100) - 5050$, deci $B = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$.

Fișă de activitate

- Fie șirul 1,2,5,10,17,26,37, ... Care este termenul al 15-lea ?
- Arătați că numărul $S=1+4+7+10+\dots+2008+2011$ se împarte exact la 671.
- Aflați numărul x din egalitatea: $3^x - 1 = 2 \cdot (3^0 + 3^1 + \dots + 3^{2003})$. (Concursul Arhimede)
- Pentru n , se consideră numerele: $S_1=1+2+3+\dots+(n-1)+n$ și $S_2=n - (n-1) + \dots - 5 - 4 + 3 - 2 + 1$.
- a) Să se determine n număr natural, știind că $S_1=2006 \cdot S_2$.
- b) Să se arate că $2 \cdot (S_1 + S_2)$ este pătrat perfect. (Dolj, et. județeană)
 - Calculați:
 - a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 19 \cdot 20$
 - b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 18 \cdot 19 \cdot 20$
 Generalizare: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = n(n+1)(n+2):3$, unde $n \in \mathbb{N}$.
 - Arătați că: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1):6$, unde $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculați suma $S = 9 + 99 + 999 + \dots +$
 - b) Calculați suma cifrelor lui S . (Bacău, et. locală)
 - Se dau numerele: $a+1, a+2, \dots, a+n$, unde a și $n \in \mathbb{N}$. Găsiți a și n astfel încât suma numerelor să fie 155. (Concursul Arhimede)
 - Fie șirul de numere naturale 7, 11, 15, 19,
 - a) Completați șirul cu încă patru numere.
 - b) Determinați al 60-lea număr din șir.
 - c) Justificați dacă numerele 372 și 415 fac parte din șir.
 - d) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului. (Brașov, et. locală)
 - Se dă șirul de numere naturale: 1; 1; 2; 5; 12; 27; 58;.....
 - a) Completați șirul cu următorii trei termeni.
 - b) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului. (Concursul Arhimede)
 - Arătați că: $(1+3+5+\dots+2007):1008016 = (2+4+6+\dots+2008):1009020$ (Sibiu, et. județeană)
 - Scriem șirul numerelor naturale impare fără să le separăm. Să se determine a 2002-a cifră. (București, et. locală)
 - Fie șirul 1, 4, 13, 40,.....
 - a) Să se afle următorii doi termeni ai șirului.
 - b) Să se arate că diferența dintre al 2009-lea termen al șirului și al 1007-lea termen al șirului este multiplu de 13. (Gorj, et. județeană)
 - Fie $S=2^{989}+3 \cdot 2^{987}+7 \cdot 2^{984}+15 \cdot 2^{980}+\dots+(2^{43}-1) \cdot 2^{44}+2^{44}-1$.
 - a) Dovediți că $S=2^{990}-1$.
 - b) S se divide cu 21. (Argeș, et. județeană)
 - a) Care sunt următorii trei termeni din șirul: 1, 2, 3, 5, 8,13,...
 - b) Care sunt următorii doi termeni din șirul: 2, 3, 6, 18, 108,
 - c) Care este următorul termen din șirul: 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 164, (Călărași, et. locală)
 - Aflați suma numerelor n știind că: . (Cluj, et. locală)
 - Se consideră tabloul următor cu 1004 linii.

$L_1:$ 2

$L_2:$ 4 2 4

