II. METODA REDUCERII LA ABSURD

Se numeşte propoziţie un enunţ despre care se poate spune că este adevărat sau fals, dar nu şi adevărat şi fals simultan.

Un enunţ respectă " Principiul terţului exclus" atunci când putem decide dacă este adevărat sau fals.

O propoziţie „p" este adevărată dacă şi numai dacă negaţia ei „non p" este falsă.

O problemă este structurată pe trei elemente:

- ipoteza (I), care conţine datele problemei, considerate afirmaţii adevărate, precum şi adevărurile stabilite anterior;

- concluzia (C), care conţine afirmaţii ce trebuie dovedite;

- interdependenţa dintre ipoteză şi concluzie (date şi necunoscute), care se concretizează într-un lanţ de raţionamente, procedeu sau algoritm folosit pentru rezolvare ().

Metoda reducerii la absurd (argumentum ad absurdum = dovedire prin absurd), este un raţionament în care se presupune că ceea ce trebuie demonstrat nu e adevărat şi, prin deducţii logice, această presupunere duce la o absurditate.

Metoda a fost concepută de Zenon (sec. V î.Hr.) şi are la bază principiul terţului exclus din logică.

Să analizăm câteva exemple:

1. Suma a şase numere naturale nenule este 20. Arătaţi că cel puţin două dintre numere sunt egale.

-pentru început stabilim ipoteza (ce ştim) şi concluzia (ceea ce se cere)

Ipoteza: am şase numere naturale diferite de zero
suma celor şase numere este 20

Concluzia: printre cele şase numere sunt unele care sunt egale (două sau mai multe)

-apoi demonstrăm (justificăm) concluzia

Demonstraţie: folosim metoda reducerii la absurd

presupunem că printre cele şase numere nu există două numere egale, adică toate cele şase numere sunt distincte două câte două

calculăm suma celor mai mici şase numere naturale nenule

1+2+3+4+5+6=21, dar din ipoteză ştim că suma numerelor este 20, deci a apărut o contradicţie!

Rezultă că ceea ce am presupus „toate cele şase numere sunt distincte două câte două" este fals de unde rezultă că „cel puţin două dintre numere sunt egale".

2. Într-o urnă sunt bile de două culori: albastre şi roşii. Oricum am scoate 6 bile între ele sunt şi bile albastre şi bile roşii. Arătaţi că numărul total de bile este mai mic sau egal cu 10.

-pentru început stabilim ipoteza (ce ştim) şi concluzia (ceea ce se cere)

Ipoteza: am bile de două culori: albastre şi roşii
oricum scot 6 bile din urnă, între ele sunt şi bile albastre şi bile roşii

Concluzia: numărul total de bile este mai mic sau egal cu 10

-apoi demonstrăm (justificăm) concluzia

Demonstraţie: folosim metoda reducerii la absurd

presupunem că sunt mai mult de zece bile, deci avem cel puţin 11 bile

fiind bile doar de două culori, atunci vor fi cel puţin 6 bile de aceeaşi culoare, dar din ipoteză ştim că „oricum scot 6 bile din urnă, între ele sunt şi bile albastre şi bile roşii”, deci a apărut o contradicţie!
Rezultă că ceea ce am presupus „că sunt mai mult de zece bile” este fals de unde rezultă că „numărul total de bile este mai mic sau egal cu 10”.

Probleme rezolvate

- Suma a două numere naturale nenule a şi b este 169. Arătaţi că unul dintre numere este mai mare sau egal cu 85.

Rezolvare:
Folosim metoda reducerii la absurd şi presupunem că niciunul dintre cele două numere nu este mai mare sau egal cu 85, atunci a 84 şi b 84 de unde a+b 168, dar din ipoteză ştim că suma numerelor este 169, deci a apărut o contradicţie! Rezultă că ceea ce am presupus „niciunul dintre cele două numere nu este mai mare sau egal cu 85” este fals de unde rezultă că „unul dintre numere este mai mare sau egal cu 85”.

- Să se arate că suma resturilor împărţirii unui număr oarecare (scris în baza 10) la a, b şi respectiv c nu poate fi 23. (Brăila, et. locală)

Rezolvare:
Presupunem prin absurd că suma resturilor împărţirii numărului la a, b şi respectiv c este egală cu 23. Din condiţia restului din teorema împărţirii cu rest şi a,b,c cifre în baza 10 rezultă că r_1, r_2, r_3 sunt mai mici sau egale decât a─1, b─1, respectiv c─1, de unde a+b+c 26, de aici rezultă că ele pot fi 8,9,9 sau 9,9,9. Calculăm suma resturilor pentru numerele 899, 989, 998, 999
şi constatăm că suma resturilor este 19, 21, 22, respectiv 0.

- Există o infinitate de numere prime.

Rezolvare:
Demostraţia aparţine matematicianului Euclid
Presupunem prin absurd că există un număr finit de numere prime 2,3,5,7,...,n. Considerăm numărul p=2·3·5·7·...·n+1. Cum peste mai mare decât n rezultă că p este un număr compus, deci el se divide cu un număr prim, adică cu unul din numerele 2, 3, 5, 7,...,n, dar observăm că dacă împărţim p cu fiecare număr prim 2, 3, 5, 7,...,n obţinem de fiecare dată restul 1. Deci există o infinitate de numere prime.

- Arătaţi că nu există niciun număr natural care împărţit la 8 dă restul 6 şi împărţit la 4 dă restul 3.

Rezolvare:
Prin metoda reducerii la absurd presupunem că există un număr natural n astfel încât $n = 8q_1 + 6$ şi $n = 4q_2+3$, cu p şi q numere natural$8q_1+6 = 4q_2+32\cdot(4q_1+3)=2\cdot(2q_2+2)-1$ deci un număr natural par este egal cu unul impar. Contradicţie! Deci nu există niciun număr natural care împărţit la 8 dă restul 6 şi împărţit la 4 dă restul 3.

- Ştiind că x, y, z sunt numere natural , să se arate că următoarele inegalităţi nu pot fi simultan adevărate: $x - 2z > 1$, $y - z1$, $2y - x1$.

Rezolvare:

Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că toate inegalităţile sunt adevărate. Înmulţim a doua inegalitate cu 2 şi adunându-le obţinem: $x-2z+2z-2\ y+\ 2y-x>0$, adică $0>0$, ceea ce este absurd. Presupunerea făcută este falsă. Deci inegalităţile considerate nu pot fi simultan adevărate.

- Arătaţi că numerele 1,2,...,16 nu pot fi scrise, câte o singură dată pe un cerc, astfel încât suma oricăror două numere alăturate să fie pătrat perfect. (Concursul Ghe. Ţiţeica)

Rezolvare:

Presupunem prin absurd că numerele 1,2,...,16 pot fi scrise, câte o singură dată pe un cerc, astfel încât suma oricăror două numere alăturate să fie pătrat perfect. Notăm cu x şi y vecinii lui 16. Atunci, cum x, rezultă că x+16, deoarece x+16 este pătrat perfect x+16=25x=9, analog y=9, contradicţie!

- Arătaţi că nu există numere naturale x şi y care să verifice egalitatea: $5x^2+3y^2=8^{2006}$. (Brăila, et. locală)

Rezolvare:

Presupunem absurd că există numerele x şi y care verifică egalitatea. Observăm că $U(5x^2)$ şi $U(3y^2)$ $U(5x^2+3y^2)$, pe de altă parte $U(8^{2006})=4$, deci presupunerea făcută este falsă.

- Doi fraţi şi tatăl lor au împreună 47 de ani. Vârsta tatălui este un număr format din două cifre, iar vârstele fiilor sunt prima, respectiv a doua cifră a vârstei tatălui.

a) Arătaţi că cei doi fraţi nu sunt gemeni.

b) Ce vârstă are tatăl şi ce vârstă are fiecare dintre fraţii săi? (Cluj, et. locală)

Rezolvare:

a) Fie vârsta tatălui. Presupunem prin absurd că fraţii sunt gemeni, atunci +a+a = 47, deci 13a=47 contradicţie!; b) +a+b=4711a+2b=47, cu a şi b cifre în baza 10, mai mici sau egale cu Deoarece b9a3, dar pe de altă parte a4, avem a=3 şi b=7, a=4 şi 2b=3 imposibil, deci vârsta tatălui eate 37 şi a copiilor 3 şi respectiv 7 ani.

- Demonstraţi că nu există niciun număr natural de patru cifre care împărţit la să dea restul şi câtul un număr natural cu ultima cifră 1. (Sălaj, et. judeţeană)

Rezolvare:

Folosim metoda reducerii la absurd şi presupunem că există =·+, < 1000a+100b+—=·99·a+90·b=(−1) 99·a+90·b=·, membrul drept este divizibil cu 10 şi cel stâng nu este divizibil cu 10, contradicţie! Deci presupunerea făcută nu este corectă.

- Fie x,y,z numere naturale distincte astfel încât x+y+z=2008 şi fiecare din numerele x,y,z dă restul r la împărţirea cu 7.

a) Determinaţi restul r.

b) Arătaţi că cel puţin unul din numerele x,y,z este mai mic decât 661.

Rezolvare:

Fie x=7a+r, y=7b+r, z=7c+r, 0<r<6 7(a+b+c)+3r=2008 7(a+b+c)+3r=2002+6r=2 sau 7(a+b+c)+3r=1995+13rN; b) folosim metoda reducerii la absurd x,y,z sunt de forma 7k+2 rezultă că x,y,z sunt cel puţin egale cu 665 x+y+z 665+672+679=2016. Fals!

- Se consideră mulţimea A= .

a) Să se afle suma elementelor mulţimii A.

b) Putem scrie mulţimea A ca reuniune de submulţimi disjuncte astfel încât cel mai mare număr din fiecare submulţime să fie egal cu suma celorlalte numere din acea mulţime? (Concurs Arhimede)

Rezolvare:

a) S=1+2+3+....+21=21·22:2 (sumă Gauss) S=231.
b) Dacă presupunem, utilizând metoda reducerii prin absurd, că le-am putea grupa ar însemna că suma numerelor din fiecare grupă ar fi un număr par, deci suma tuturor numerelor de la 1 la 21 ar fi un număr par, dar S=231, impar, deci presupunerea făcută este falsă.

- Demonstraţi că nu există x,y,z N astfel încât $x^2 - 2y^2 + 8z - 3=0$. (Olimpiadă Austria)

Rezolvare:
Presupunem că există x,y,z N cu proprietatea din enunţ. Fie x=2n+1, nN, înlocuind obţinem $(2n+1)^2 - 2y^2 + 8z - 3=04n^2+4n=2y^2 - 8z+24n(n+1)=2(y^2 - 4z+1)\,|\,:2$ $2n(n+1)+4z= y^2+1$y este impar, $y=2p+12n(n+1)+4z=(2p+1)^2+12n(n+1)+4z=4p^2+4p+2\,|\,:2$ $n(n+1) + 2z = 2p(p+1)+1$, deoarece produsul a două numere consecutive n(n+1) este par obţinem o contradicţie - membrul stâng al egalităţii este par, iar cel drept este impar, deci presupunerea făcută este falsă.

- Se aşează cifrele 2,3,4,5,6,7,8,9 într-o ordine oarecare, obţinând un număr A. Se aşează apoi aceleaşi cifre în altă ordine, obţinând numărul B A. Să se arate că A nu se divide cu B. (Neamţ, et. judeţeană)

Rezolvare:
Presupunem prin absurd că A se divide cu B A=p·B, unde p>1 şi p 4 (a8). Calculăm suma cifrelor şi obţinem 37 care este M_9+1, deci A= M_9+1 şi B= M_9+1, deci A nu poate fi de forma p·B, de unde rezultă că presupunerea făcută este falsă.

Probleme propuse

- Suma a trei numere naturale este 166. Demonstraţi că cel puţin unul dintre numere este mai mare sau egal cu 56.
- Demonstraţi că numărul 7654 nu poate fi scris ca suma unor numere impare consecutive. (Dâmboviţa, et. locală)
- În copacul fermecat sunt 2006 mere de aur. Prâslea are voie să culeagă de fiecare dată 21, 32 sau 42 de mere. În fiecare caz cresc la loc 11, 7, respectiv 23 de mere. Este posibil ca Prâslea să culeagă toate merele? (Suceava, et. judeţeană)
- Fie numerele naturale a şi b astfel încât 2a + 3b, 2a + 4b, 2a + 5b nu se divid prin 3. Arătaţi că b este divizibil cu 3 şi că a nu este divizibil cu 3.
- Fie A o submulţime nevidă a lui N care satisface simultan condiţiile: i) card A=4; ii) pentru orice xA, cel puţin unul din numerele x−3 sau x+3 este în A.

a) Daţi un exemplu de astfel de mulţime.
b) Arătaţi că produsul elementelor lui A nu poate fi 102. (Sălaj, et. locală)

- Se consideră un tabel cu 2012 linii şi 2011 coloane. Este posibil ca în fiecare celulă a tabelului să fie scris câte un număr natural nenul astfel încât suma numerelor de pe orice linie sau coloană să fie număr prim? Justificaţi. (Concurs Mathematica-Modus vivendi, Rm. Vâlcea)
- Fiecare element al mulţimii A=se colorează cu una din culorile roşu, galben şi albastru, respectând următoarele reguli:

a) suma dintre orice număr galben şi orice număr albastru este divizibilă cu 3;
b) suma oricăror două numere roşii este divizibilă cu 3;
Arătaţi că numărul 3 este roşu şi calculaţi suma tuturor numerelor care nu sunt roşii.(Mureş, et. locală)

- Într-un an oarecare, trei luni consecutive conţin exact câte 4 duminici fiecare. Demonstraţi că una dintre aceste luni este februarie. (Concurs „La şcoala cu ceas”, Rm. Vâlcea)
- Dacă numărul 5^a+5^b (a,bN) se scrie ca sumă de două pătrate perfecte, atunci b–a este par.
- Există nouă numere naturale prime diferite două câte două a căror sumă să fie 125? Justificaţi. (Bucureşti, et. locală)
- Suma a zece numere naturale distincte este 62. Arătaţi că produsul lor se divide cu 60. (Concursul Ghe. Ţiţeica)
- Dacă suma a 63 de numere naturale nenule este 2000, să se arate că printre ele există cel puţin două egale. (Sălaj, et. judeţeană)
- Să se arate că numărul 49^n+1, n N nu poate fi divizibil cu 100.(Concursul Arhimede)

Soluţii probleme propuse

1. Presupunem prin metoda reducerii la absurd că niciunul dintre numerele x, y, z nu este mai mare sau egal cu 56. Atunci rezultă că x55, y55, z55, adică x + y + z 165. Dar din ipoteză x + y + z = 166. Deci 166 ≤ 165 contradicţie!; 2. Presupunem prin absurd că 7654=(2k+1)+ (2k+3)+...+ (2k+2p+1)7654=2k(p+1)+$(p+1)^2$7654=(p+1)(2k+p+1)p+1 este număr par, deci (p+1) (2k+p+1) este divizibil cu 4, dar 7654 nu este divizibil cu 4. Contradicţie!; 3. Presupunem că Prâslea poate culege toate merele. Dacă Prâslea culege de x ori câte 23 de mere, de y ori câte 32 de mere şi de z ori câte 43 de mere rezultă că 10x+25y+20z=2006, egalitate imposibilă în mulţimea N; 4. Folosim metoda reducerii la absurd şi presupunem că a este divizibil cu 3. Rezultă că 3 divide (2a + 3b) – contradicţie cu ipoteza problemei. Deci a nu se divide cu 3, rezultă că a este de forma: 3k + 1 sau 3k + 2, unde k este număr natural. Prin reducere la absurd, presupunem că b nu se divide cu 3, rezultă că b = 3p + 1 sau b = 3p + 2, unde p este număr natural. Pentru orice formă ale lui a şi b, cel puţin unul dintre numerele 2a + 3b, 2a + 4b, 2a + 5b se divide cu 3, ceea ce este fals, deci b este divizibil cu 3; 5. a) o astfel de mulţime este A=, unde x,yN, xy; b) presupunem prin absurd că x·y(x+3)·(y+3)=1023| x·y(x+3)·(y+3) şi 3| x+3, deci 9|102, contradicţie!Analog se demonstrază şi pentru celelalte trei numere; 6. Folosim metoda reducerii la absurd, presupunem că orice sumă de pe o linie sau coloană este un număr prim mai mare decât 2, aşadar suma este un număr impar. Dacă adunăm sumele celor 2012 linii, obţinem un număr par, adică suma numerelor din fiecare celulă este un număr par şi dacă adunăm sumele celor 2011 coloane obţinem un număr impar, adică suma numerelor din fiecare celulă este un număr impar. Contradicţie!; 7. Presupunem prin absurd că numărul 3 nu este roşu, atunci el este fie galben, fie albastru. Dacă 3 ar fi galben, atunci numerele 6,9,12,...,99 sunt galbene sau albastre şi 1,2,4,5,7,...,97,98 sunt roşii. Dar 1+4=5 care nu este multiplu de 3, ceea ce contrazice ipoteza. Numerele roşii sunt 3,6,9,12,...,99, deci suma numerelor care nu sunt roşii este 3367; 8. Presupunem prin absurd că avem trei luni consecutive printre care nu se află luna februarie. Acestea conţin cel puţin 30+31+30=91 zile, deci cel puţin 13 săptămâni cu 13 duminici. Contradicţie!; 9. Presupunem că a şi b au parităţi diferite. Fără a restrânge generalitatea considerăm a=2n-1 şi b=2m cu n,mN. 25=8·3+1 şi 25^t=8k+1, t N5^a+5^b=5·(8k+1)+8u+1=8v+6, dar orice pătrat perfect este de forma 8r, 8r+1, 8r+4 contradicţie! Deci a şi b au aceeaşi paritate şi b–a este par; 10. Presupunem prin absurd că ar exista nouă numere care îndeplinesc condiţia dată. Dacă printre cele nouă numere s-ar afla numărul 2, atunci suma ar fi pară. Contradicţie! Dacă suma numerelor este 3+5+7+11+13+17+19+23+29=127. Contradicţie!; 11. Presupunem prin

absurd că niciun număr nu se divide cu 3, atunci S 1+2+4+5+7+8+10+11+13+14=75, contradicţie! Deci cel puţin unul dintre numere se divide cu 3. Analog se demonstrează că cel puţin unul din numere se divide cu 4, respectiv 5; 12. Presupunem că toate numerele sunt diferite şi calculăm suma celor mai mici numere naturale 1+2+3+...+63=2016, contradicţie!; 13. Presupunem prin absurd că $49^n+1=100k$, unde kN

$49^n = 100k - 1 M_4+3$, dar $(7^n)^2+1=M_4+1$. Contradicţie!

Fişă de activitate

- Să se arate că nu există niciun număr natural care împărţit la 25 să dea restul 15 şi împărţit la 15 să dea restul 6.(Prahova, et. locală)
- Într-un aprozar sunt 19 lăzi de mere de două calităţi. Să se arate că există cel puţin 10 lăzi de mere de aceeaşi calitate.
- Dacă a şi b sunt numere naturale nenule atunci numerele a^2+4b şi b^2+4a nu sunt ambele pătrate perfecte.
- Să se arate că produsul a trei numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.
- Suma a 50 de numere naturale nenule distincte este 1276. Arătaţi că există cel puţin un număr dintre ele mai mare decât 50.(Tulcea, et. locală)
- Într-o şcoală sunt 731 elevi. Arătaţi că există cel puţin 3 elevi care işi serbează ziua de naştere în aceeaşi zi a anului.
- La un concurs participă la 50 de elevi, care trebuie să rezolve 5 probleme. Dacă prima problemă este rezolvată de 45 de elevi, a doua de 39, a treia de 43, a patra de 36, iar a cincea de 39 de elevi, să se arate că cel puţin doi elevi au rezolvat toate problemele. (Sibiu, et. locală)
- Un casier are numai monede de 3 lei şi de 5 lei. Poate el să plătească orice sumă de bani, număr natural, mai mare sau egală cu 8? (Concursul Arhimede)

- Suma a 37 de numere naturale nenule pare este 1308. Arătaţi că cel puţin două dintre ele sunt egale. (Iaşi, et. locală)
- Stabiliţi dacă dacă există numere naturale m şi n astfel încât (m – n)(m + n + 1) = 1999.
- Dacă un număr natural se divide cu 7, dar nu se divide cu 49, atunci numărul nu este pătrat perfect.
- Stabiliţi dacă există numere prime a,b,c astfel încât $a^2+b^2+c^2=2008$.
- Să se arate că, dacă suma a 20 de numere naturale nenule distincte este egală cu 418, atunci cel puţin două dintre aceste numere sunt impare. (Caraş-Severin, et. judeţeană)
- Suma a 5 numere naturale este 300. Se poate termina produsul lor în 2009? Justificaţi.
- Într-o urnă sunt 9 bile pe care sunt scrise numerele 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Arătaţi că oricum am alege 3 bile, suma numerelor de pe bilele rămase este cel puţin 21.
- Într-o clasă sunt 13 fete şi 12 băieţi. Arătaţi că oricum am forma grupe de câte 5 elevi, există cel puţin o grupă în care sunt: a) cel puţin 3 fete; b) cel puţin 3 băieţi.
- Suma a 104 numere naturale consecutive este un număr divizibil cu 3. Poate fi divizibil cu 3 cel mai mic dintre aceste numere? Justificaţi.
- Demonstraţi că nu există x,y,z N astfel încât $x^2 - y^2 = 4z+2$.
- Demonstraţi că nu există niciun număr natural n astfel încât n, n+2, n+6, n+14, n+18, n+20 să fie simultan numere prime.
- a) Suma a cincizeci de numere naturale nenule diferite este 2548. Arătaţi că printre ele există cel puţin două numere impare.

b) Găsiţi măcar o astfel de alegere.

c) Arătaţi că există cel puţin 20 de astfel de posibilităţi. (Mehedinţi, et. locală)

- Mulţimile A şi B au ca elemente numere naturale consecutive. Dacă şi diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic element din este 1997, arătaţi că mulţimile A şi B nu pot avea acelaşi număr de elemente. (Bucureşti, et. locală)
- La o masă rotundă stau 2008 persoane a căror sumă a vârstelor este 3^{11} ani. Arătaţi că, indiferent cum se aşează la masă aceste persoane, vor exista două persoane alăturate cu suma vârstelor mai mare de 81. (Botoşani, et. judeţeană)
- a) Să se scrie mulţimea A=ca o reuniune de trei mulţimi disjuncte.

b) Să se arate că oricum am împărţi în 3 grupe cifrele 1,2,3,...,9, există o grupă ale cărei cifre au produsul strict mai mare decât 71. (Buzău, et. judeţeană)