I. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET (Principiul cutiei)

Principiul cutiei: „dacă repartizăm n+1 obiecte în n cutii atunci cel puţin doua obiecte vor fi în aceeaşi cutie”.
Justificare: considerăm cazul cel mai nefavorabil aşezând în fiecare cutie căte un obiect. Deci am folosit „n” cutii şi „n” obiecte. Obiectul cu numărul n+1 trebuie pus şi el într-o cutie oarecare dar în acea cutie există deja un obiect. Aşadar avem o cutie cu două obiecte.
Nu este important care cutie conţine cel puţin două obiecte, nici câte obiecte sunt în acea cutie şi nici câte astfel de cutii există. Important este că există cel puţin o cutie cu cel puţin două obiecte.

Probleme rezolvate

• Se consideră 7 numere naturale. Demonstraţi că printre numerele date, cel puţin două dau acelaşi rest la împărţirea cu 6.
<u>Rezolvare:</u>
La împărţirea cu 6 a unui număr natural se poate obţine unul din resturile: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Considerăm cutia „i” formată din numerele care dau restul „i” la împărţirea cu 6. Rezultă astfel 6 cutii în care trebuie plasate 7 numere. Va exista cel puţin o cutie care conţine două sau mai multe numere care dau acelaşi rest la împărţirea cu 6.

• Să se arate că oricum am alege 7 numere pătrate perfecte (distincte), există cel puţin două a căror diferenţă se divide cu 10.
<u>Rezolvare:</u>
Dacă aN, a^2 împărţit la 10 va da unul din resturile: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Deoarece avem 7 pătrate perfecte şi numai 6 resturi, atunci există cel puţin două pătrate perfecte care dau acelaşi rest la împărţirea cu 10, deci diferenţa lor se divide cu 10.

• Să se demonstreze, că printre orice şase numere naturale există două numere a căror diferenţă este divizibilă prin 5.
<u>Rezolvare:</u>
Considerăm 5 cutii etichetate cu numerele 0,1,2,3,4 care reprezintă cele cinci resturi pe care le putem obţine la împărţirea cu 5. Repartizăm în aceste cutii cele 6 numere naturale, alese arbitrar. În aceeaşi cutie se aşează numerele care dau acelaşi rest la împărţirea cu 5. Observăm că sunt mai multe numere decât cutii, deci conform Principiului lui Dirichlet sunt două numere în aceeaşi cutie, deci dau acelaşi rest la împărţirea cu 5. Atunci diferenţa lor se divide cu 5.

• Să se arate că oricum am alege cinci numere naturale, există două dintre acestea, care au suma sau diferenţa divizibile cu 7.
<u>Rezolvare:</u>
La împărţirea cu 7 a unui număr rezultă resturile 0,1,2,3,4,5,6. Pătratul său va da la împărţirea cu 7 unul din resturile 0,1,2,4. Avem cinci numere şi patru resturi, rezultă conform principiului cutiei că cel puţin două din cele cinci pătrate dau acelaşi rest la împărţirea cu 7; $x^2 - y^2$ se divide cu 7, deci $7 \mid (x - y)(x + y)$, dar 7 este număr prim, deci $7 \mid x-y$ sau $7 \mid x+y$.

• Într-o clasă cu 35 de elevi, numărul băieţilor este cu 2 mai mare decât jumătate din numărul fetelor. Arătaţi că cel puţin 4 fete sunt născute în acceaşi zi a săptămânii şi cel puţin doi băieţi sunt născuţi în aceeaşi lună a anului. (Bihor, et. locală)
<u>Rezolvare:</u>
Din efectuarea calculelor obţinem 13 băieţi şi 22 fete. Sunt 13 băieţi şi anul are 12 luni, conform principiului cutiei rezultă că cel puţin doi băieţi sunt născuţi în aceeaşi lună a anului. Sunt 22 fete şi săptămâna are 7 zile conform principiului cutiei rezultă că cel puţin 4 fete sunt născute în aceeaşi zi a săptămânii.

- Să se demonstreze că pentru orice număr natural n 1, există un număr natural format din cifrele 0 şi 5, divizibil prin n.

Rezolvare:

Considerăm numerele naturale a_1=50, a_2=5050,…, a_n=5050…..50 şi repartizăm aceste "obiecte" în "cutii" numerotate cu numerele 0,1,...,n-1 (care reprezintă resturile împărţirii la n). În cutia s plasăm numărul a_k, care are restul împărţirii la k egal cu s.
Dacă în cutia cu indicele 0 este un "obiect" (adică un număr), atunci problema este rezolvată. În caz contrar n "obiecte" sunt plasate în n-1 "cutii". În baza principiului lui Dirichlet există două "obiecte" (numere) plasate în aceeaşi cutie. Deci, există două numere cu acelaşi rest la împărţirea prin n. Diferenţa lor va fi divizibilă prin n şi diferenţa numerelor formate din cifrele 0 şi 5 la fel va fi un număr format din cifrele 0 şi 5.

- Demonstraţi că din oricare 4 numere naturale diferite putem alege două astfel încât suma cifrelor diferenţei lor să fie multiplu de 3.

Rezolvare:

Restul împărţirii unui număr natural la 3 este unul din numerele 0,1,2 şi cum avem patru numere, atunci conform Principiului cutiei există două numere naturale care dau acelaşi rest la împărţirea cu 3. Diferenţa acestor două numere va fi divizibilă cu 3, deci suma cifrelor diferenţei va fi multiplu de 3, conform criteriului de divizibilitate cu 3.

- Se ştie că o şcoală are exact 2007 elevi. Să se arate că cel puţin doi dintre elevii şcolii au acelaşi număr de prieteni. (Se presupune că dacă elevul A este prieten cu elevul B, atunci şi elevul B este prieten cu elevul A. Un elev nu este prieten cu el însuşi). (Galaţi, et. locală)

Rezolvare:

Observăm că numărul de prieteni pe care-l poate avea un elev din acea şcoală este 0,1,2,...2006. Nu poate exista un elev cu 0 prieteni şi nici un altul cu 2006 prieteni deoarece ar contrazice ipoteza. Există două posibilităţi, numărul de prieteni ai fiecărui elev să fie din mulţimea A=sau B=. CardA=CardB=2006 şi numărul elevilor este 2007, deci conform Principiului cutiei există cel puţin doi elevi cu acelaşi număr de prieteni.

- Să se arate că dintre 1003 numere naturale care împărţite la 2005 dau restul un număr natural impar, există cel puţin două numere a căror diferenţă se împarte exact la 2005. (Concursul Arhimede)

Rezolvare:

Folosim teorema împărţirii cu rest şi avem $n=2005\cdot c+r$, $r<2005$ din condiţia r număr impar
r   deci r ia 1002 valori. Cum avem 1003 numere, conform Principiului cutiei, există două care dau acelaşi rest la împărţirea lor prin 2005. Fie $n_1=2005\cdot c_1+r$ şi $n_2=2005\cdot c_2+r$ $n_1 - n_2 =2005\cdot(c_1-c_2)$.

- Să se arate că oricum am alege 10 numere din mulţimea , printre ele există două numere a şi b astfel încât a divide b.

Rezolvare:

Observăm că un număr natural se poate scrie sub forma $n=2^k\cdot(2m+1)$, unde k 0. Definim cutiile ca fiind următoarele mulţimi: M_1=, M_2 =, M_3=, M_4=, M_5=, M_6=, M_7=, M_8=, M_9=. Cutiile s-au format pornind de la un număr impar la care s-au adăugat toţi multiplii acestui număr impar obţinuţi prin înmulţirea cu puteri ale lui 2. Conform Principiului cutiei dacă alegem 10 numere, două dintre ele a şi b cu a<b vor fi în aceeaşi cutie, deci vor fi de forma $a=2^p\cdot(2m+1)$ şi $b=2^q\cdot(2m+1)$, p<q, de unde a divide b.

- În 500 cutii se află mere. Se ştie că în fiecare cutie se află cel mult 240 mere. Să se demonstreze că există cel puţin 3 cutii ce conţin acelaşi număr de mere.

Rezolvare:

Fie că în primele 240 cutii se află un număr diferit de mere (1, 2, …, 240) şi în următoarele 240 de cutii la fel (adică se examinează cazul extrem). Astfel au rămas 500 − 2 · 240 = 20 cutii, în care trebuie să plasăm merele de la 1 la 240.

- Oricum am scoate 7 bile dintr-o urnă în care se afă bile albe şi negre, printre cele 7 bile se află cel puţin o bilă neagră. Care este numărul maxim de bile albe din urnă?

Rezolvare:

Presupunem că în urnă sunt cel puţin 7 bile. Atunci este posibil ca la o extragere să scoatem 7 bile albe. Dacă în urnă sunt 6 bile albe, chiar în cazul cel mai nefavorabil când primele 6 bile sunt albe, a şaptea va fi, cu siguranţă, neagră, deci numărul maxim de bile albe este 6.

Probleme propuse

- Fie 10 bile colorate. Să se arte că există 4 bile colorate la fel sau 4 bile de culori diferite. (Vâlcea, et. judeţeană)
- Să se arate că există două puteri ale lui 2 a căror diferenţă se divide cu 2009.
- În orice mulţime de 10 numere naturale distincte există două a căror diferenţă se divide cu 9.
- Considerăm mulţimea A= $\{a_1,a_2,\ldots\ldots a_n\}$cu elemente numere naturale. Să se demonstreze că A are cel puţin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.
- La o întrunire internaţională participă 17 persoane. Fiecare cunoaşte cel mult trei limbi străine şi oricare doi participanţi pot conversa între ei. Să se demonstreze că există cel puţin trei participanţi care cunosc aceeaşi limbă.
- Să se demonstreze că dintre n + 1 numere naturale diferite, mai mici ca 2n, pot extrage 3 numere, astfel încât un număr este egal cu suma celorlalte două.
- Suma a 63 de numere naturale nenule este 2000. Să se arate că cel puţin două dintre acestea sunt egale. Care este cel mai mare număr de numere egale cu proprietatea cerută?
- Fie n un număr natural nenul oarecare de forma n=, unde c este ultima cifră a numărului n şi c. Să se demonstreze că există un număr natural care se divide cu n şi
care se scrie folosind numai cifra c .
- Să se arate că din oricare trei numere naturale prime, mai mari strict ca 3, putem alege două astfel încât diferenţa să fie divizibilă cu 6.
- La un turneu de şah au participat n2 şahişti. Să se demonstreze că în orice moment al turneului dinaintea ultimei runde cel puţin doi şahişti au acelaşi număr de victorii.

Soluţii probleme propuse

1. Avem două cazuri a) există 4 bile de aceeaşi culoare. Propoziţia este adevărată; b) nu există 4 bile de aceeaşi culoare, atunci cel mult 3 bile au aceeaşi culoare. Dar 10=3·3+1, conform principiului cutiei, rezultă că există cel puţin o bilă care are o a patra culoare; 2. Consider[m numerele $2^0,2^1,2^3,\ldots,2^{2009}$. La împărţirea acestor 2010 numere cu 2009 se obţin 2010 resturi. Dar la împărţirea unui număr la 2009 se obţin resturile 0,1,2,...,2008, conform principiului cutiei există două numere care dau acelaşi rest. Fie $2^i=2009\cdot c_1+r$, $2^j=2009\cdot c_2+r$, (i,j numere naturale, i<j), prin scăderea celor două numere obţinem concluzia; 3. Fie n=9·c+r, , conform principiului cutiei există două numere care dau acelaşi rest şi dacă le scădem diferenşa lor se va divide cu 9; 4. Fie a=n·q+r cu qN şi r {0,1,…,n-1}. Considerăm următoarele n submulţimi ale lui A: $A_1=\{a_1\}$, $A_2=\{a_1,a_2\}$,…, $A_n=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$. Notăm cu $S_i=a_1+a_2+\ldots+.a_i$, cu i=1,n (suma elementelor fiecărei mulţimi). Dacă unul din numerele S_i cu i=1,n se divide cu n, problema este rezolvată. Dacă nu, cele n resturi obţinute prin impărţirea cu n a numerelor S_i, aparţin mulţimii {1, 2, ….n-1 }cu n-1 elemente diferite. Deci conform principiului cutiei există două numere S_i şi S_j care dau acelaşi rest la impărţirea cu n. Fie $S_i=a_1+a_2+\ldots a_i$ şi $S_j=a_1+a_2+\ldots a_j$ cele două numere. Fie i<j ;cum n| S_i-S_j, rezultă că submulţimea este B={a_{i+1},

$a_{i+2},\ldots.a_j\}$; 5. Fie A unul din participanţi. El poate vorbi cu oricare din cei 16 participanţi în cel mult o limbă din cele trei. Atunci există o limbă, în care A vorbeşte cu nu mai puţin de 6 participanţi. Printre aceştia e B unul oarecare. Este clar că printre alţi 5 participanţi sunt 3 cu care B poate vorbi în aceeaşi limbă (o vom numi a doua limbă). Dacă printre aceşti trei, cel puţin doi, să spunem C şi D, pot vorbi cu oricare în a doua limbă, atunci B, C şi D sunt cei trei participanţi ce vorbesc aceeaşi limbă; 6. Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ numerele date. Dacă facem diferenţele numerelor două câte două, obţinem numere pozitive diferite şi mai mici ca 2n. Astfel avem 2n+1 numere naturale

$a_1, a_2,\ldots, a_{n+1}, a_2-a_1, a_3-a_2, \ldots, a_{n+1}-a_n$ fiecare fiind mai mic ca 2n. Conform principiului cutiei cel puţin două numere coincid. Unul dintre aceste două numere aparţine mulţimii $a_1, a_2,\ldots, a_{n+1}$ şi celălalt mulţimii $a_2-a_1, a_3-a_2, \ldots, a_{n+1}-a_n$. Fie aceste numere a_k şi a_m-a_1 $a_m = a_k + a_1$;

7. Considerăm cele mai mici numere distincte posibile, atunci1+2+3+……63=2016>2000, deci cel puţin două numere sunt egale. De exemplu 2+3+4+…+62+48=2000. Dacă toate numerele sunt egale, atunci: x+x+…..+x=2000; 63x=2000 de unde x nu este natural. Pot fi cel mult 62 numere egale, cu proprietatea cerută ,de exemplu 1+1+…+1+1938=2000; 8. Considerăm numerele naturale scrise în baza 10: N_1=c, N_2=, N_3= , … N_{n+1}= . Conform teoremei împărţirii cu rest, $N_k=n\cdot q_k+r_k$, r_k . Conform Principiului lui Dirichlet, printre cele n+1 numere $N_1, N_2,..., N_{n+1}$ există cel puţin două care au acelaşi rest la împărţirea cu n. Prin urmare, printre resturile $r_1,r_2,\ldots r_{n+1}$ există cel puţin două resturi egale. Fie acestea $r_m=r_p$ cu m<p. Numărul $N=N_p-N_m=(n\cdot q_p+r_p)-(n\cdot q_m+r_m) = n\cdot(q_p-q_m)$. Rezultă că numărul N se divide cu n. $N=\cdot 2^m\cdot 5^m$, atunci $n\cdot(q_p-q_m)=\cdot 2^m\cdot 5^m$.

Dar numărul n este impar, prin urmare nu se divide cu 2. U(n)deci restul împărţirii la 5 poate fi 1,2,3 sau 4, deci n nu se divide cu 5se împarte exact la n; 9. Numerele naturale pot fi de forma 6k+r, unde r . Numerele prime au forma 6k+1 sau 6k+5. Alegând 3 numere prime, conform principiului cutiei, două vor da acelaşi rest la împărţirea cu 6. Diferenţa lor se divide cu 6; 10. În orice moment al turneului dinaintea ultimei runde, fiecare şahist a jucat maximum $n-2$ partide şi a putut obţine $0,1,2,...,n-2$ victorii, deci în total $n-1$ posibilităţi (cutii). Fiindcă la turneu au participat n şahişti rezultă că cel puţin doi şahişti au acelaşi număr de victorii înaintea ultimei runde.

Fişă de activitate

- Se dă mulţimea M= {1, 4, 7, 10, 13, …, 97, 100} şi o submulţime S a lui M formată din 19 elemente. Să se arate că există în mulţimea S două elemente a căror sumă este egală cu 104.
- Să se arate că din oricare trei numere prime, mai mari decât 3, se pot alege două cu proprietatea că suma lor sau diferenţa lor se divide cu 12.
- Scriem pe rând 84 de numere naturale nenule distincte astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie un număr par.

i) Arătaţi că oricum am alege şapte dintre aceste numere există două a căror diferenţă este divizibilă cu 12.
ii) Demonstraţi că cea mai mică sumă posibilă a celor 84 de numere este pătrat perfect.
• Arătaţi că dacă avem 33 de bile roşii şi albastre, oricum le-am pune în 4 cutii, va exista o cutie în care se află cel puţin 5 bile de aceeaşi culoare.
• Să se arate, că printre orice (n + 2) numere naturale există două numere cu suma sau diferenţa divizibilă prin 2n.

• Să se arate că oricum am alege 504 numere naturale distincte nenule cel mult egale cu 2007, printre ele există două a căror diferenţă este 2,3,5 sau 8. (Concursul Arhimede-IMAC)
• La un magazin pe un raft se găsesc 10 banane, 20 de mere, 8 gutui, 15 piersici şi 25 caise. Câte fructe trebuie să luăm din raft pentru a fi siguri că avem 12 de acelaşi fel?
• Să se demonstreze că din 11 cifre pot fi selectate două cifre identice.
• Într-o cutie sunt 10 creioane de culoare roşie, 8 de culoare albastră, 8 de culoare verde şi 4 de culoare galbenă. La întâmplare (aleator) din cutie se extrag n creioane. Să se determine numărul minim de creioane care trebuie extras astfel încât să fie:
a) nu mai puţin de patru creioane de aceeaşi culoare;
b) cel puţin 6 creioane sunt de culoare albastră;
c) câte un creion de fiecare culoare.
• În campionatul naţional de fotbal participă 30 echipe. Să se demonstreze că în orice moment există două echipe cu număr egal de jocuri jucate în campionat.
• Considerăm mulţimea a=. Arătaţi că printre oricare 9 elemente ale mulţimii A, există cel puţin două al căror produs este pătrat perfect. (Concursul Florica T. Câmpan, Iaşi)
• Se consideră numerele naturale a si b, astfel încât 2a < b .

Se completează fiecare dintre cele 9 pătrăţele ale pătratului din figura alăturată cu numerele 1, a si b astfel încât fiecare dintre acestea să apară o singură dată pe fiecare linie si pe fiecare coloană a pătratului.
a) Arătaţi că două dintre colţurile opuse ale pătratului sunt completate cu numere egale.
b) Arătaţi că una dintre diagonalele pătratului este completată cu numere egale.
c) Dacă produsul numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană si de pe fiecare diagonală este egal cu n, arătaţi că n este cub perfect. (Bucureşti, et. locală)
• Să se demonstreze, că pentru orice număr natural există un multiplu al lui scris numai cu cifrele 0 şi 1.
• Să se arate că există un număr natural cu ultimele patru cifre 1998 şi divizibil prin 1997.
• Arătați că oricum am alege 9 divizori naturali ai numărului 30^{2009}, există cel puțin doi al căror produs este pătrat perfect.
• Demonstrați că pentru orice număr natural prim cu 10 există un multiplu al său scris doar cu cifra 3.
• Demonstrați că oricum am alege 37 de numere naturale nenule, există 7 a căror sumă este multiplu de 7.